

LOGARITHME NÉPÉRIEN, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES.

En 1614, John Neper propose une nouvelle méthode de calcul, qui permet, en remplaçant les nombres par leurs *logarithmes* (de *logos* : raison, rapport, et *rythmos* : nombres), de n'utiliser que des additions, soustractions, et divisions par 2 ou 3. Puis Leibniz et surtout Newton donneront une autre approche du logarithme en s'intéressant à la fonction.

La fonction exponentielle est liée aux problèmes des exposants non entiers, étudiés depuis l'antiquité. C'est principalement Euler qui définit le nombre « *e* », et formalise la fonction exponentielle. Cette fonction occupe une place capitale dans les équations différentielles.

I. Fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés algébriques

Définition.

La fonction *logarithme népérien*, notée \ln , définie sur $]0; +\infty[$, est l'unique primitive de la fonction inverse qui prend la valeur 0 pour $x = 1$:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0.$$

Théorème.

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Par conséquent, pour tous réels strictement positifs a et b et tout nombre entier relatif n :

$$\ln(a^n) = \dots\dots\dots ; \ln(\sqrt{a}) = \dots\dots\dots ; \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots\dots\dots ; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots\dots\dots$$

Quelques démonstrations : voir exercice 1.

Exemples :

$$\ln(6) - \ln(3) = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) =$$

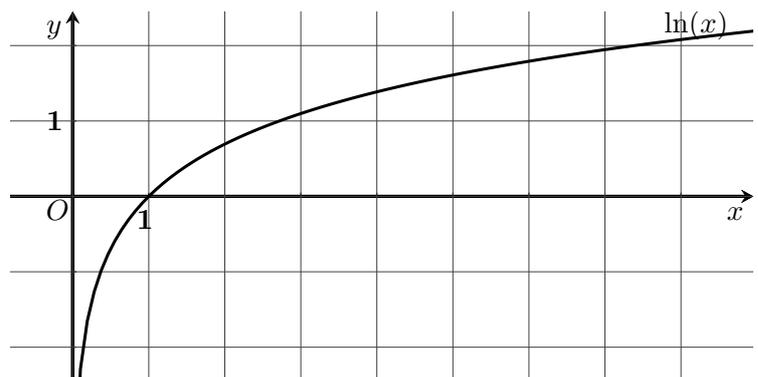
2) Propriétés de la fonction logarithme népérien

Dérivabilité : la fonction \ln est dérivable sur ...

Et pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I , et qui ne s'annule pas sur I , la fonction composée $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$

Variations et courbe :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		
$\ln(x)$		



La courbe représentative de la fonction \ln a pour asymptote

Conséquence : la fonction \ln est une bijection strictement croissante de 1/6

Valeurs remarquables :

$\ln(1) = \dots$

On note e l'unique antécédent de 1 par \ln : $e \approx 2,718$, et $\ln(e) = \dots$

Limites remarquables :

* D'après la courbe, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \dots\dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \dots\dots\dots$.

* Limite issue d'un taux d'accroissement $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

* Limites issues du th. des croissances comparées : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \dots\dots\dots$

Équations, inéquations : la fonction \ln étant strictement croissante, on peut établir :

$\ln(x) = 0 \iff x = 1$ et $\ln(x) = 1 \iff x = e$

$\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln(x) > 0 \iff x > 1$

$\ln(x) < 1 \iff 0 < x < e$ et $\ln(x) > 1 \iff x > e$

II. Fonction exponentielle

1) Définition et ses conséquences

La fonction \ln réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $] - \infty; +\infty[$.

Donc elle admet une réciproque, que nous appellerons **exponentielle**, définie sur \dots

Définition.

La fonction **exponentielle** notée \exp est la réciproque de la fonction \ln .

C'est-à-dire : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$

$x \mapsto y$ tel que $\ln(y) = x$ (autrement dit y est l'antécédent de x par \ln)

Remarque : pour tout réel x , d'après les propriétés de \ln , on a $\ln(e^x) = x \ln(e) = x$, autrement dit, e^x est un antécédent de x par la fonction \ln .

Or $\exp(x)$ est l'unique antécédent de x par la fonction \ln , on note donc que pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

Conséquences directes de la définition :

$\forall x \in \dots\dots\dots$ et $\forall y \in \dots\dots\dots$, $\exp(x) = y \iff x = \ln(y)$
 $\forall x \in \dots\dots\dots$, $\ln(\exp(x)) = x$ soit $\ln(e^x) = x$
 $\forall x \in \dots\dots\dots$, $\exp(\ln(x)) = x$ soit $e^{\ln(x)} = x$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ soit $e^x > 0$.

Et la fonction \exp est une bijection strictement croissante de $\dots\dots\dots$

2) Propriétés algébriques

Les fonctions exponentielle et logarithme étant les réciproques l'une de l'autre, les propriétés algébriques sont « inversées ».

Propriété.

Pour tous nombres réels a et b :

$e^{a+b} = \dots\dots\dots$

Par conséquent, pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$e^{na} = \dots\dots\dots$; $e^{\frac{1}{2}a} = \dots\dots\dots$; $e^{-b} = \dots\dots\dots$; $e^{a-b} = \dots\dots\dots$

Il s'agit des règles classiques déjà connues sur les puissances entières.

Exercice : simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} \ln(e^{-5}) &= & e^{\ln(\sqrt{2})} &= & e^{5 \ln(2)} &= \\ e^{-\ln(5)} &= & \ln(3e^2) &= & e^{\ln(6) - \ln(10)} &= \end{aligned}$$

3) Propriétés de la fonction exponentielle

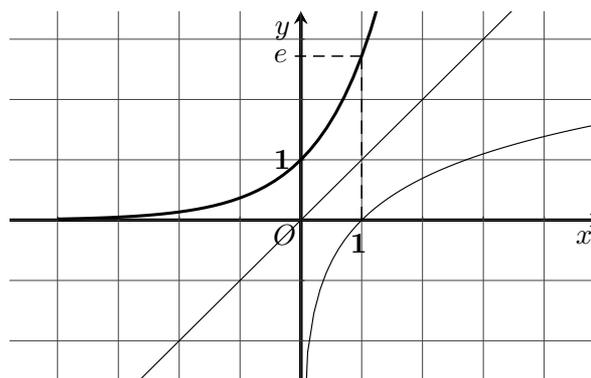
Propriété.

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est elle-même : $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
 Et si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\boxed{(\exp(u))' = u' \exp(u)}$.

Démonstration :

Variations et courbe :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$		



La courbe représentative de la fonction exponentielle a pour asymptote ...

Valeurs remarquables :

$\exp(0) = \dots$ et $\exp(1) = \dots$

$e^0 = \dots$ et $e^1 = \dots$

Limites remarquables :

* $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots}$.

* Limite issue du taux d'accroissement en 0 : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

* Limites issues du théorème des croissances comparées :

pour tout n de \mathbb{N}^* , $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \dots}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \dots}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \dots}$.

Équations et inéquations : (conséquences de la définition, ou du fait que exp est strictement croissante)

$\exp(x) = 1 \iff x = 0$ et $\exp(x) = e \iff x = 1$
 $\exp(x) < 1 \iff x < 0$ et $\exp(x) > 1 \iff x > 0$
 $\exp(x) < e \iff x < 1$ et $\exp(x) > e \iff x > 1$

III. Puissances d'exposant réel



Pour $a > 0$, $e^{5 \ln(a)} = \dots$

1) Définition et propriétés algébriques d'une puissance d'exposant réel

Définition.

Pour tout $a > 0$ et tout b réel, on appelle « a **puissance** b » et on note a^b le réel strictement positif défini par

$$a^b = e^{b \ln(a)}.$$

Remarque : si b est entier, a^b correspond à la définition usuelle d'une puissance entière : $a^b = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{b \text{ facteurs}}$.



Dans a^b , a est la variable, et b l'exposant.



Les formules connues avec les puissances entières, et avec l'exponentielle, sont vraies aussi avec des puissances non entières, à condition que la variable soit strictement positive :

Propriété.

Pour x et y dans $]0, +\infty[$ et α et β réels :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \quad \text{et} \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$1^\alpha = 1 \quad \text{et} \quad x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^1 = x \quad \text{et} \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Une preuve : $x^{\alpha+\beta} = \dots$

Exemples : pour $x > 0$, $x^{-2,7} x^{2,7} = \dots$ et $(5^7)^{\frac{1}{7}} = \dots$ $\frac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \dots$

2) Fonctions puissances d'exposants réels

Définition.

Pour tout réel α , on appelle **fonction puissance** α la fonction : $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Exemple : lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, pour tout x de $]0; +\infty[$, $x^{\frac{1}{2}} = \dots$
 $= \dots$
 $= \dots$

De même, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \dots$

On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est **la racine n-ième de x** et on la note $\sqrt[n]{x}$.

Exemple : $64^{\frac{1}{2}} = \dots$ $64^{\frac{1}{3}} = \dots$
 $16^{\frac{1}{4}} = \dots$ $16^{\frac{3}{4}} = \dots$

Remarque : si α est entier, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}^* (et même sur \mathbb{R} si α est positif).

Propriété de dérivabilité.

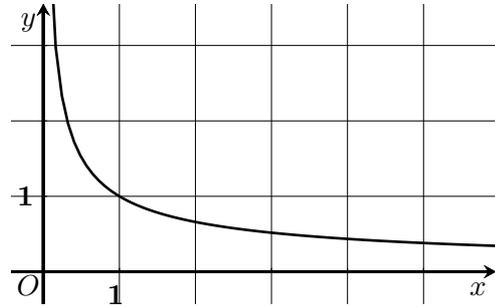
Pour tout nombre réel α , la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
(même formule qu'avec des exposants entiers)

Démonstration :

Variations, courbe et limites usuelles :

• **si $\alpha < 0$:**

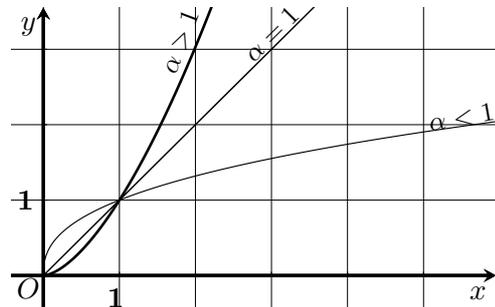
x	0	$+\infty$
dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		



• **si $\alpha = 0$:** $x^0 = \dots\dots\dots$

• **si $\alpha > 0$:**

x	0	$+\infty$
dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		



Dans ce cas où $\alpha > 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Théorème des croissances comparées.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(\beta x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Corollaire : on utilisera aussi, en les nommant croissances comparées, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\beta x)}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\beta x)}{\ln(x)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\beta x)} = 0.$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \sqrt{x}$?

3) Cas général



Méthode : pour étudier des fonctions de type $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on revient à la définition : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^x$.

Construire le tableau des variations complet de f , avec limites aux bords et extremum.

Déterminer une équation de la tangente en $x = 1$.

Tracer l'allure de la courbe de f (on prendra $\frac{1}{e} \approx 0,4$ et $f(\frac{1}{e}) \approx 0,7$).