Logarithme népérien, exponentielle et puissances.

En 1614, John Neper propose une nouvelle méthode de calcul, qui permet, en remplaçant les nombres par leurs *logarithmes* (de *logos* : raison, rapport, et *rythmos* : nombres), de n'utiliser que des additions, soustractions, et divisions par 2 ou 3. Puis Leibniz et surtout Newton donneront une autre approche du logarithme en s'intéressant à la fonction.

La fonction exponentielle est liée aux problèmes des exposants non entiers, étudiés depuis l'antiquité. C'est principalement Euler qui définit le nombre « e », et formalise la fonction exponentielle. Cette fonction occupe une place capitale dans les équations différentielles.

I. Fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés algébriques

Définition.
La fonction ***logarithme népérien***, notée ln, définie sur $]0;+\infty[$, est l'unique primitive de la fonction inverse qui prend la valeur 0 pour $x=1$:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1)=0.$$

Théorème.
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Par conséquent, pour tous réels strictement positifs a et b et tout nombre entier relatif n :

$\ln\left(a^n\right) = \dots\dots\dots\dots$; $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dots\dots\dots\dots$; $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots\dots\dots\dots$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots\dots\dots\dots$

Quelques démonstrations : voir exercice 1.

Exemples :

$\ln(6) - \ln(3) =$

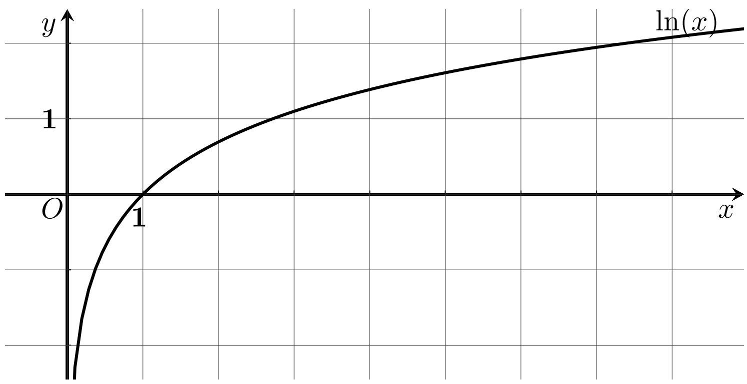
$\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) =$

2) Propriétés de la fonction logarithme népérien

Dérivabilité : la fonction ln est dérivable sur ...
Et pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I, et qui ne s'annule pas sur I, la fonction composée $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et $\boxed{(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}}$

Variations et courbe :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	
$\ln(x)$	‖	



La courbe représentative de la fonction ln a pour asymptote ....

Conséquence : la fonction ln est une bijection strictement croissante de ....

Valeurs remarquables :
$\ln(1) = \ldots$

$\boxed{\text{On note } e \text{ l'unique antécédent de 1 par ln : } e \approx 2,718, \text{ et } \ln(e) = \ldots.}$

Limites remarquables :

$\star$ D'après la courbe, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \ldots\ldots}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = \ldots\ldots}$.

$\star$ Limite issue d'un taux d'accroissement $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1}$.

$\star$ Limites issues du th. des croissances comparées : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = \ldots \text{ et } \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots}$

Équations, inéquations : la fonction ln étant strictement croissante, on peut établir :
$\ln(x) = 0 \iff x = 1$ et $\ln(x) = 1 \iff x = e$
$\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln(x) > 0 \iff x > 1$
$\ln(x) < 1 \iff 0 < x < e$ et $\ln(x) > 1 \iff x > e$

II. Fonction exponentielle

1) Définition et ses conséquences

La fonction ln réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]-\infty; +\infty[$.

Donc elle admet une réciproque, que nous appellerons ***exponentielle***, définie sur ....

Définition.

La fonction ***exponentielle*** notée exp est la réciproque de la fonction ln.

C'est-à-dire : $\exp : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to &]0; +\infty[\\ x & \mapsto & y \text{ tel que } \ln(y) = x \end{array}$ (autrement dit y est l'antécédent de x par ln)

Remarque : pour tout réel x, d'après les propriétés de ln, on a $\ln(e^x) = x\ln(e) = x$, autrement dit, e^x est un antécédent de x par la fonction ln.
Or $\exp(x)$ est l'unique antécédent de x par la fonction ln, on note donc que $\boxed{\text{pour tout réel } x, \exp(x) = e^x}$.

Conséquences directes de la définition :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \ldots\ldots \text{ et } \forall y \in \ldots\ldots,\ \exp(x) = y \iff x = \ln(y) \\ \forall x \in \ldots\ldots,\ \ln\big(\exp(x)\big) = x \text{ soit } \ln(e^x) = x \\ \forall x \in \ldots\ldots,\ \exp\big(\ln(x)\big) = x \text{ soit } e^{\ln(x)} = x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0 \text{ soit } e^x > 0. \end{array}}$$

Et la fonction exp est une bijection strictement croissante de ....

2) Propriétés algébriques

Les fonctions exponentielle et logarithme étant les réciproques l'une de l'autre, les propriétés algébriques sont « inversées ».

Propriété.

Pour tous nombres réels a et b :

$$e^{a+b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent, pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

$$e^{na} = \ldots\ldots\ ;\ e^{\frac{1}{2}a} = \ldots\ldots\ ;\ e^{-b} = \ldots\ldots\ ;\ e^{a-b} = \ldots\ldots$$

Il s'agit des règles classiques déjà connues sur les puissances entières.

Exercice : simplifier les expressions suivantes.

$\ln(e^{-5}) =$ $\qquad$ $e^{\ln(\sqrt{2})} =$ $\qquad$ $e^{5\ln(2)} =$

$e^{-\ln(5)} =$ $\qquad$ $\ln(3e^2) =$ $\qquad$ $e^{\ln(6)-\ln(10)} =$

3) Propriétés de la fonction exponentielle

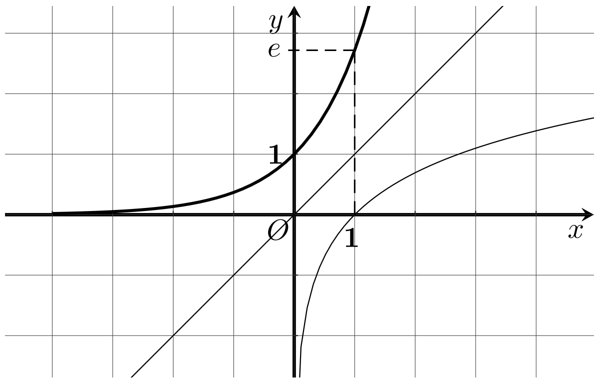
Propriété.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même : $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
Et si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\boxed{(\exp(u))' = u' \exp(u)}$.

Démonstration :

Variations et courbe :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp(x)$	



La courbe représentative de la fonction exponentielle a pour asymptote ...

Valeurs remarquables :

$\exp(0) = \ldots$ et $\exp(1) = \ldots$

$e^0 = \ldots$ et $e^1 = \ldots.$

Limites remarquables :

$\star$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = \ldots\ldots}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = \ldots\ldots}$.

$\star$ Limite issue du taux d'accroissement en 0 : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

$\star$ Limites issues du théorème des croissances comparées :

pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \ldots \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \ldots\ldots}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \ldots\ldots}$.

Équations et inéquations : (conséquences de la définition, ou du fait que exp est strictement croissante)

$\exp(x) = 1 \Longleftrightarrow x = 0$ et $\exp(x) = e \Longleftrightarrow x = 1$
$\exp(x) < 1 \Longleftrightarrow x < 0$ et $\exp(x) > 1 \Longleftrightarrow x > 0$
$\exp(x) < e \Longleftrightarrow x < 1$ et $\exp(x) > e \Longleftrightarrow x > 1$

III. Puissances d'exposant réel

Pour $a > 0$, $e^{5\ln(a)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1) Définition et propriétés algébriques d'une puissance d'exposant réel

Définition.

Pour tout $a > 0$ et tout b réel, on appelle « a ***puissance*** b » et on note a^b le réel strictement positif défini par

$$a^b = e^{b\ln(a)}.$$

Remarque : si b est entier, a^b correspond à la définition usuelle d'une puissance entière : $a^b = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{b \text{ facteurs}}$.

Dans a^b, a est la variable, et b l'exposant.

Les formules connues avec les puissances entières, et avec l'exponentielle, sont vraies aussi avec des puissances non entières, à condition que la variable soit strictement positive :

Propriété.

Pour x et y dans $]0,+\infty[$ et α et β réels :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \quad \text{et} \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$1^\alpha = 1 \quad \text{et} \quad x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^1 = x \quad \text{et} \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Exemples : pour $x > 0$, $x^{-0,2}x^{4,2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad x^{-2,7}x^{2,7} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(5^7)^{\frac{1}{7}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Fonctions puissances d'exposants réels

Définition.

Pour tout réel α, on appelle ***fonction puissance*** α la fonction : $\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} \end{array}$.

Exemple : lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, pour tout x de $]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}} &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De même, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \ldots$

On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est ***la racine*** n***-ième de*** x et on la note $\sqrt[n]{x}$.

Exemple : $64^{\frac{1}{2}} = \ldots$ $\quad 64^{\frac{1}{3}} = \ldots$

$16^{\frac{1}{4}} = \ldots$ $\quad 16^{\frac{3}{4}} = \ldots$.

Remarque : si α est entier, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$ si n est positif).

Propriété de dérivabilité.

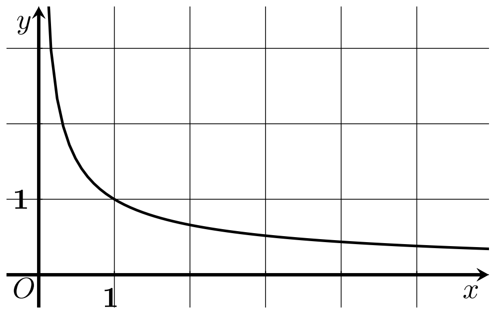
Pour tout nombre réel α, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
(*même formule qu'avec des exposants entiers*)

Démonstration :

Variations, courbe et limites usuelles :

• **si** $\alpha < 0$ **:**

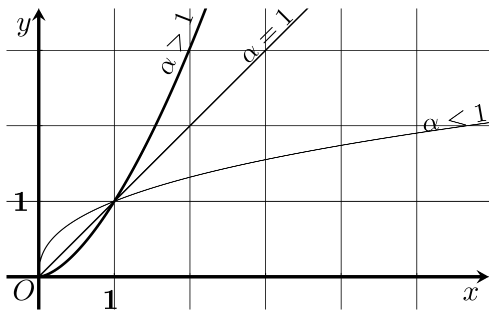
x	0	$+\infty$
dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		



• **si** $\alpha = 0$ **:** $x^0 =$ . . . .

• **si** $\alpha > 0$ **:**

x	0	$+\infty$
dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		



Dans ce cas où $\alpha > 0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, on peut prolonger la fonction en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Théorème des croissances comparées.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x\exp(\beta x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Conséquence : on utilisera aussi, en les nommant croissances comparées, les limites suivantes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\beta x)}{x^\alpha} = +\infty}$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - \sqrt{x}$?

3) Cas général

Méthode : pour étudier des fonctions de type $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on revient à la définition : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^x$.
Construire le tableau des variations complet de f, avec limites aux bords et extremum.
Déterminer une équation de la tangente en $x = 1$.
Tracer l'allure de la courbe de f (on prendra $\frac{1}{e} \approx 0,4$ et $f(\frac{1}{e}) \approx 0,7$).