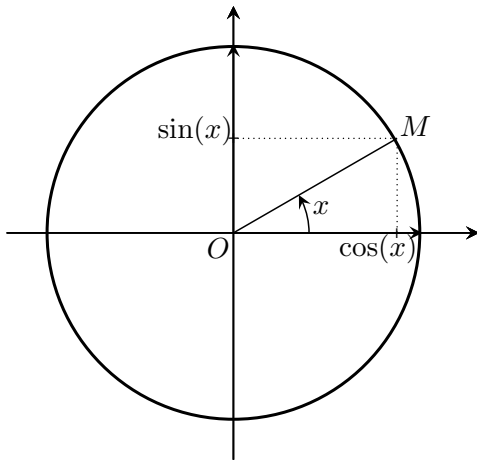


FONCTIONS CIRCULAIRES



Définition.

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe à tout nombre x le point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$.

- L'abscisse du point M est appelée **cosinus de x** , noté $\cos(x)$.
 - L'ordonnée de M est appelée **sinus de x** , noté $\sin(x)$.
- Les fonctions cos et sin sont ainsi définies sur \mathbb{R} .

Propriété.

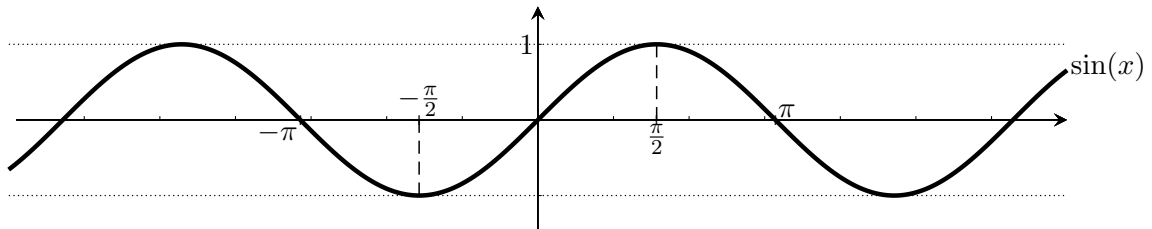
Pour tout x de \mathbb{R} , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

I. Fonctions Sinus et Arcsinus

1) Sinus

Propriétés.

- ★ La **fonction sinus** est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[-1, 1]$.
- ★ Elle est 2π -périodique :
- ★ Elle est impaire :
- ★ Elle est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $\sin'(x) = \dots$
(et donc si u est dérivable, $x \mapsto \sin(u(x))$ a pour dérivée $x \mapsto \dots$)
- ★ Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \dots$



2) Arcsinus

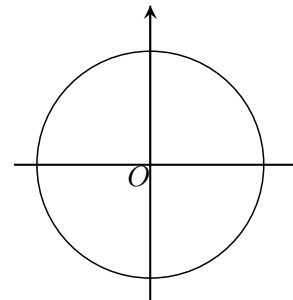
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	-1	1

La fonction sinus n'est pas une bijection de \mathbb{R} dans $[-1, 1]$.
Mais elle est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et sur cet intervalle elle atteint les valeurs -1 et 1 . Donc sa restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection dans $[-1, 1]$.

Définition.

On appelle **arcsinus** la bijection réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}$ (restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$).

Autrement dit, $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 $x \mapsto y$ tel que $\sin(y) = x$



Exemples : $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots$ car

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \dots$

$\arcsin(-1) = \dots$

Calculs avec arcsin :

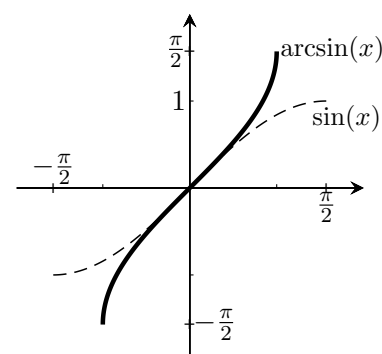
• $\forall x \in \dots\dots\dots$, $\boxed{\arcsin(\sin(x)) = \dots}$ (1)

• $\forall x \in \dots\dots\dots$, $\boxed{\sin(\arcsin(x)) = \dots\dots}$ (2) et $\boxed{\cos(\arcsin(x)) = \dots\dots}$ (3)

En effet,

Propriétés de la fonction Arcsinus.

- ★ La fonction Arcsinus est définie sur $[-1; 1]$ et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- ★ Elle est dérivable sur $] - 1; 1[$ et $\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- ★ Elle est strictement croissante sur $[-1; 1]$, et impaire.



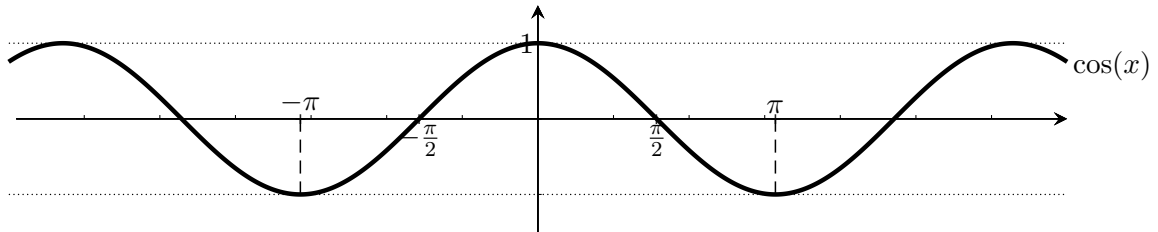
Démonstration (sauf imparité) :

II. Fonctions Cosinus et Arccosinus

1) Cosinus

Propriétés.

- ★ La **fonction cosinus** est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $[-1, 1]$.
- ★ Elle est 2π -périodique :
- ★ Elle est paire :
- ★ Elle est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x , $\cos'(x) = \dots\dots$
(et donc si u est dérivable, $x \mapsto \cos(u(x))$ a pour dérivée $x \mapsto \dots\dots$)
- ★ Limite remarquable : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dots\dots$



2) Arccosinus

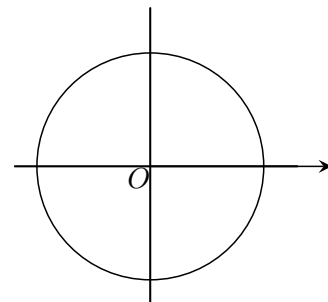
x	0	π
$\cos(x)$	1	-1

La fonction cosinus n'est pas une bijection de \mathbb{R} dans $[-1, 1]$.
Mais elle est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, et sur cet intervalle elle atteint les valeurs -1 et 1 . Donc sa restriction à $[0, \pi]$ réalise une bijection dans $[-1, 1]$.

Définition.

On appelle **arccosinus** la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0, \pi]}$ (restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$).

Autrement dit, $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0, \pi]$
 $x \mapsto y$ tel que $\cos(y) = x$



Exemples : $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots\dots$ car $\dots\dots$
 $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \dots\dots$ $\arccos(-1) = \dots\dots$

Calculs avec arccos :

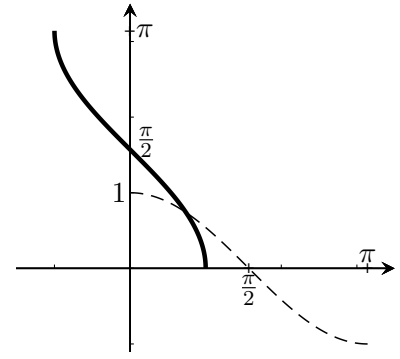
- $\forall x \in \dots\dots, \boxed{\arccos(\cos(x)) = \dots\dots} \quad (1)$
- $\forall x \in \dots\dots, \boxed{\cos(\arccos(x)) = \dots\dots} \quad (2)$ et $\boxed{\sin(\arccos(x)) = \dots\dots} \quad (3)$

En effet,



Propriétés de la fonction Arccosinus.

- ★ La fonction Arccosinus est définie sur $[-1; 1]$ et prend ses valeurs dans $[0, \pi]$.
- ★ Elle est dérivable sur $] - 1; 1[$ et $\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.
- ★ Elle est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.



Justification de la formule :

III. Fonctions Tangente et Arctangente

1) Tangente

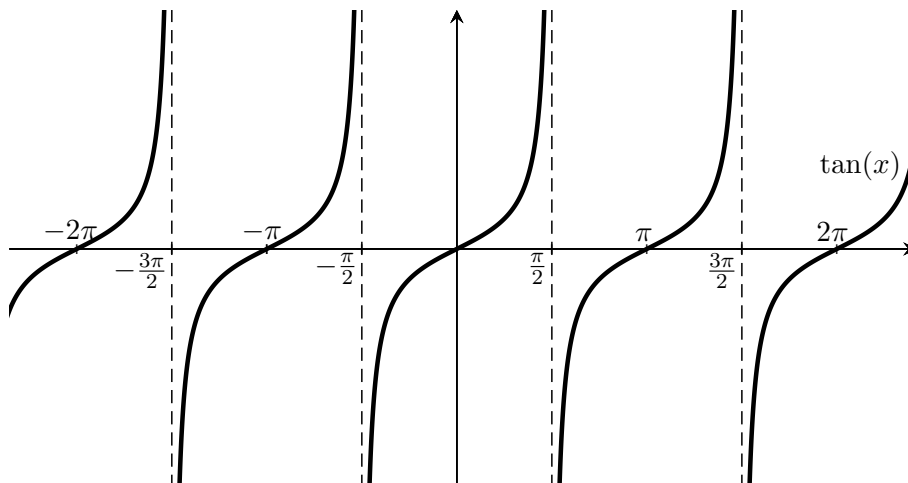
Définition.

La *fonction tangente* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Propriétés.

La *fonction tangente* est :

- ★ π -périodique :
- ★ impaire :
- ★ dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout x de cet ensemble, $\boxed{\tan'(x) = \dots\dots\dots}$
 (si u est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\tan(u)' = \dots\dots\dots$)
- ★ Limites remarquables : $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.



Démonstrations de la dérivée et des limites :

2) Arctangente

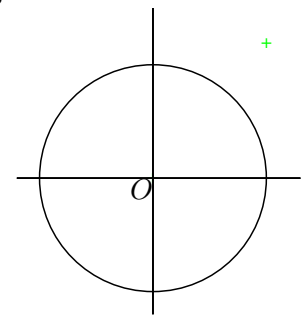
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$-\infty$	$+\infty$

La fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
 Donc sa restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection dans \mathbb{R} .

Définition.

On appelle **arctangente** la bijection réciproque de la fonction $\tan]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ (restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$).

Autrement dit, $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
 $x \mapsto y$ tel que $\tan(y) = x$



Exemples : $\arctan(1) = \dots$ car \dots

$\arctan(-\sqrt{3}) = \dots$; $\arctan(0) = \dots$

Calculs avec arctan :

- $\forall x \in \dots, \arctan(\tan(x)) = \dots$
- $\forall x \in \dots, \tan(\arctan(x)) = \dots$
- $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = \dots$

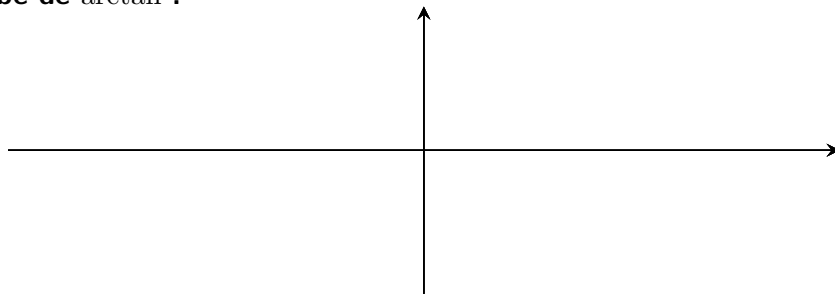


Propriétés de la fonction Arctangente.

- ★ La fonction Arctangente est définie sur \mathbb{R} et prend ses valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- ★ Elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\arctan'(x) = \dots$.
 (et pour toute fonction u dérivable, $(\arctan(u))' = \dots$)
- ★ Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} et impaire.
- ★ Limites remarquables : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \dots$.

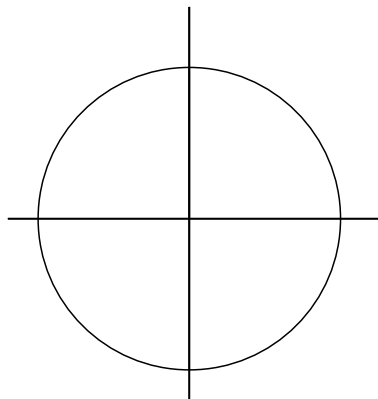
Quelques justifications :

Courbe de arctan :



IV. Équations trigonométriques

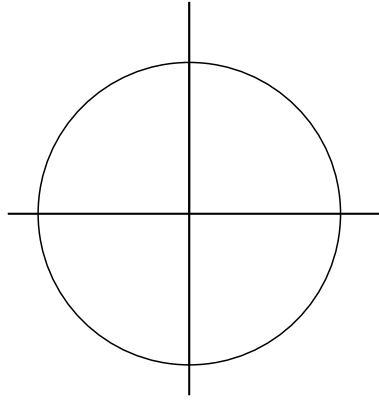
1) **Équations** $\sin(x) = a$ **ou** $\sin(x) = \sin(\theta)$



$\sin(x) = a$	\iff	$\exists k \in \mathbb{Z},$	$x = \arcsin(a) + 2k\pi$	ou	$x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi$
$\sin(x) = \sin(\theta)$	\iff	$\exists k \in \mathbb{Z},$	$x = \theta + 2k\pi$	ou	$x = \pi - \theta + 2k\pi$

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{4}$.

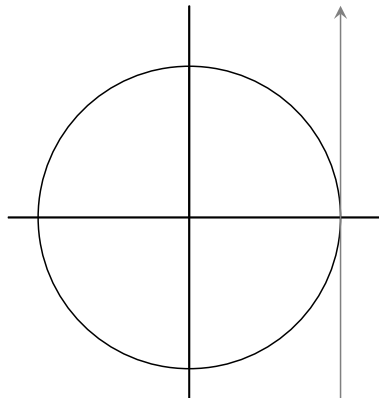
2) Équations $\cos(x) = a$ et $\cos(x) = \cos(\theta)$



$\cos(x) = a \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \arccos(a) + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos(a) + 2k\pi$
$\cos(x) = \cos(\theta) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \theta + 2k\pi \text{ ou } x = -\theta + 2k\pi$

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Équation $\tan(x) = a$ ou $\tan(x) = \tan(\theta)$



$\tan(x) = a \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \arctan(a) + k\pi$
$\tan(x) = \tan(\theta) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \theta + k\pi$

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\tan(x) = \frac{1}{4}$.



Bilan : pour résoudre des équations trigonométriques, utiliser les formules de trigonométrie pour simplifier l'expression puis utiliser les équivalences ci-dessus.



Attention : dans les calculs, utiliser la notation $\exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \dots + 2k\pi$ plutôt que $\theta = \dots [2\pi]$ pour en tenir compte correctement à chaque opération.

Exemple : résolution de dans \mathbb{R} puis $[0, 2\pi[$ l'équation $(E) : \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$.