Nombres réels.

Exercice 1.
Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 2.
Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?
$A = \{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2\}$
$B = \{\sin(x) + 2\cos(y) + 1 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
$C = \{5\sin(x) - e^y + 3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 3.
Pour chacune des parties des $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes supérieures et inférieures, et préciser s'il s'agit de plus grand élément ou plus petit élément :
$A = \{1 + n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$B = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
$C = \{|xy| \mid x \in [-1,1],\ y \in [2,3[\}$
$D = \{|x + 3y| \mid x \in [6;7], y \in [-3;-2]\}$

Exercice 4.
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup(A) > 0$.
Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 5.
Soit $A = \{a, b\}$ une partie de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\max(A) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ et que $\min(A) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

Exercice 6.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (k,\theta) \in \mathbb{Z} \times [0, 2\pi[,\ x = 2k\pi + \theta$.

Exercice 7.
Construire la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \lfloor 2\sin(x) \rfloor$ sur $[-\pi;\pi]$.

Exercice 8.
Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$?

Exercice 9.
Soient x et y dans $\mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
(a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ **(b)** $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ $\star$ **(c)** $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor$