Variables aléatoires sur un univers fini.

Les variables aléatoires sont basées sur la théorie de la mesure, qui consiste à associer une grandeur numérique à des ensembles (qui peuvent être très abstraits et complexes), qui peut en quelque sorte être vu comme une façon d'estimer leur taille, leur dimension.
Emile Borel (1871-1956) et Henri Lebesgues (1875-1951) sont les deux principaux créateurs de la théorie de la mesure. Et c'est Andreï Kolmogorov (1903-1987) qui l'utilisa pour les probabilités.

I. Variable aléatoire et loi

Lorsqu'on lance deux dés, on peut obtenir comme issues .... ,
en fait $\Omega =$ .... , et $\text{card}(\Omega) =$ ......

On rappelle que dans une situation d'équiprobabilité sur un univers fini, la probabilité d'un événement A se calcule en utilisant la formule $\mathbf{P}(A) =$

On suppose alors que les deux dés sont équilibrés, de sorte que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, alors $\mathbf{P}($« faire un double 6 »$) =$

Si A est l'événement « obtenir un 3 et un 5 », alors $A = \{$ .... et $\mathbf{P}(A) =$

On appelle S la somme des deux dés. Alors, si on a obtenu un 3 et un 5, on a $S = \ldots$.

$S = 8$ dans d'autres cas aussi : ....

En fait, $\{S = 8\}$ est l'événement $\{$ ....

Ainsi, la probabilité que la somme des deux dés fasse 8 est $\mathbf{P}(S = 8) = \ldots$.

Qu'est-ce que S ? Chaque fois que l'on lance les dés, S prend une valeur liée au résultat : S *varie* suite à la réalisation d'une *expérience aléatoire*, on lui donne donc le nom de ***variable aléatoire***. Elle associe à chaque issue de Ω un nombre réel. Cela peut se noter ainsi : $S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & \ldots \end{array}$

Par l'application S, l'image de l'issue $(3, 5)$ est $\ldots$.

Définition.

Soit Ω un univers.
Une ***variable aléatoire*** est une application définie sur Ω à valeurs dans un ensemble E.
$\star$ Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est ***réelle***.
$\star$ Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on parle de ***variable aléatoire finie***.

Cette année, nous n'étudierons que des ***variables aléatoires réelles finies***.

Notations : si X est une variable aléatoire sur Ω, alors on note $(X = 3)$ ou $\{X = 3\}$ l'ensemble des issues de Ω qui ont pour image 3 par X, c'est donc un événement.

En fait, $(X = 3) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\}$, c'est donc l'image réciproque de $\{3\}$ par l'application X, autrement dit $X^{-1}(\{3\})$.
De même, l'ensemble des issues ω de Ω telles que $X(\omega)$ est dans A sera noté $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$. Il s'agit en fait de $X^{-1}(A)$.
On utilise aussi $(X \leqslant x)$ pour l'ensemble des issues ω telles que $X(\omega) \leqslant x$, ou $X^{-1}(\ldots$

Alors, si Ω est muni de la probabilité $\mathbf{P}$, on peut calculer la probabilité de tous ces événements, par exemple $\mathbf{P}(X = 3)$.

Remarque importante : si X est à valeurs entières, et k un entier : $(X \leqslant k - 1) \cup (X = k) =$ ....

1) Loi de probabilité

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète finie sur un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbf{P}$.
La ***loi de probabilité*** de X est notée $\mathbf{P}_X$.
C'est une application. $\mathbf{P}_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbf{P}(X=x) \end{array}$.
Autrement dit, elle est définie par deux données :
⋆ les valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
⋆ la probabilité de chacune de ces valeurs : les $\mathbf{P}(X = x_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

La loi d'une variable aléatoire se représente souvent sous forme d'un tableau :

valeurs	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n	total
probabilités	$\mathbf{P}(X = x_1)$	$\mathbf{P}(X = x_2)$	...	$\mathbf{P}(X = x_k)$	...	$\mathbf{P}(X = x_n)$	

On peut aussi donner $X(\Omega)$ et une formule pour calculer chacune des probabilités $\mathbf{P}(X = x_k)$.

Notations : en fait, $\mathbf{P}(X = x_1)$ est $\mathbf{P}_X(\{x_1\})$ parfois noté aussi $\mathbf{P}_X(x_1)$.

Exemples :

▲ expérience du lancer de deux dés où S est la variable aléatoire réelle de la somme des deux résultats.
$S(\Omega) =$ ....
On suppose que les dés sont équilibrés, alors :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$\mathbf{P}(S = k)$	$\mathbf{P}(S=2)$	$\mathbf{P}(S=3)$										

D'après ce tableau, $\mathbf{P}(S \geqslant 10) = \dots$

⧫ On joue avec une pièce équilibrée que l'on lance deux fois. On note X le nombre de Faces obtenues à la fin des deux lancers.

....

....

....

....

2) Image d'une variable aléatoire par une application

Exemple ⧫ : un jeu d'argent propose de lancer deux fois une pièce équilibrée, et de gagner 3 euros par Face obtenue, et de donner 1 euro par Pile obtenu. On note G le gain à la fin du jeu, et X est toujours le nombre de Faces.

....

....

En fait, $G = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = \dots$.
G est un nombre qui dépend du résultat de l'expérience, c'est donc aussi une variable aléatoire.
$G(\Omega) = \dots$
Et $\mathbf{P}(G = \dots) =$ ....

....

Définition.

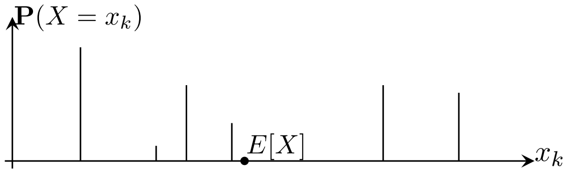
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$, et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $\varphi(X)$ est une nouvelle variable aléatoire dont la loi de probabilité se déduit de celle de X par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}_{\varphi(X)}(x) = \mathbf{P}_X(\varphi^{-1}(\{x\}))$.

En effet, $\mathbf{P}_{\varphi(X)}(x) =$ ....

II. Espérance et variance

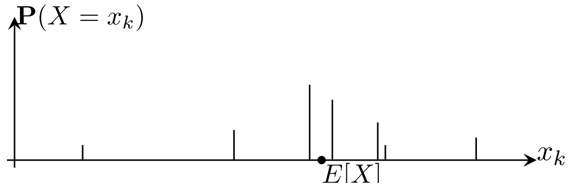
Si l'on réalise plusieurs fois une expérience, on peut calculer la moyenne *statistique* (ou *empirique*) des résultats obtenus, et s'intéresser à la dispersion des résultats autour de la moyenne (mesurée par l'écart-type).

L'espérance et la variance sont les mesures théoriques de la moyenne et de la dispersion.



valeurs très dispersées autour de la moyenne

variance élevée



valeurs peu dispersées

variance faible

1) Espérance

a. Calcul de l'espérance

Définition.

X est une variable aléatoire finie sur Ω.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
L'espérance de X est notée $E(X)$ et est définie par $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.

Concrètement : $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{P}(X = x_k) \\ &= x_1\mathbf{P}(X = x_1) + x_2\mathbf{P}(X = x_2) + \ldots + x_n\mathbf{P}(X = x_n) \end{aligned}$$.

Méthode : pour calculer l'espérance à partir de la table de loi, on multiplie entre eux les deux nombres d'une colonne (« valeur × probabilité ») et on fait la somme sur toutes les colonnes.

Exemples :

▲ espérance de la variable aléatoire de la somme de deux dés :

$$\begin{aligned} E(S) &= \\ &= \\ &= \frac{252}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

♦ $E(X) =$

b. Propriétés de l'espérance

Propriété de linéarité de l'espérance.

X est une variable aléatoire, a et b deux nombres, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$.
Et si Y est une autre variable aléatoire sur le même univers : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Plus généralement, il existe une formule pour calculer l'espérance de $\varphi(X)$ directement à partir de la loi de X (sans avoir à déterminer la loi de $\varphi(X)$, et même si φ n'est pas affine) :

Théorème de transfert.

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$, et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.
Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $E(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)\mathbf{P}(X = x_k)$.

En particulier, $\boxed{E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2\mathbf{P}(X = x_k)}$ (ici $\varphi(x) = x^2$).

Exemple ⧫ : voici trois calculs différents l'espérance de la variable aléatoire $G = 4X - 2$:

⋆ à partir de la loi de G :

$$E(G) =$$
$$=$$
$$=$$

⋆ à partir de la loi de X avec le théorème de transfert :

$$E(G) = E(4X - 2)$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

⋆ à partir de l'espérance de X par linéarité :

$$E(G) = E(4X - 2) = \dots$$

2) Variance

a. Calcul de la variance

Définition.

X est une variable aléatoire finie sur Ω.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Alors la ***variance*** de X notée $V(X)$ se définit par $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$. Autrement dit :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_k)$$
$$= (x_1 - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_2) + \dots + (x_n - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_n)$$

L'***écart-type***, noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Explications : $(x_k - E(X))^2$ ....

....

....

Pour calculer la variance, on utilise en général la **formule de Kœnig-Huygens** : $\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$.

Méthode :

(i) on calcule $E(X)$ (si ce n'est pas déjà fait) et on met le résultat au carré.

(ii) on calcule $E(X^2)$ par le théorème de transfert : à partir de la table de loi, pour chaque colonne, on met au carré la <u>valeur</u>, et on la multiplie par la probabilité. On ajoute les résultats de toutes les colonnes.

(iii) $V(X) =$ résultat du **(ii)** $-$ résultat du **(i)**

Exemples : ⧫ calcul de $V(X)$:

(i) on avait calculé $E(X) =$ .... donc $(E(X))^2 = \dots$

(ii) $E(X^2) =$ ....

(iii) $V(X) =$ ....

• Soit la variable aléatoire Y sur $\Omega = \{1; 2; 3\}$ avec $\mathbf{P}(Y = 1) = 0,6$, $\mathbf{P}(Y = 2) = 0,3$ et $\mathbf{P}(Y = 3) = 0,1$.

(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

b. Propriétés de la variance

$\boxed{\mathrm{Var}(X) \geqslant 0}$ et si $\mathrm{Var}(X) = 0$, alors X est constante ($X(\Omega)$ ne contient qu'un seul nombre).

Attention : $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Si X est une variable aléatoire, a et b deux nombres, alors $\boxed{\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)}$.

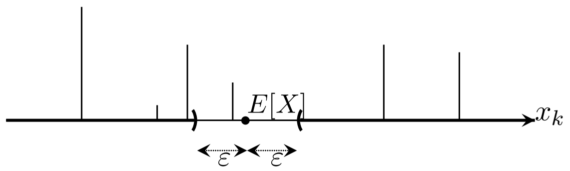
Par exemple : $V(2X+1) = \dots$ $V(-3X+4) = \dots$

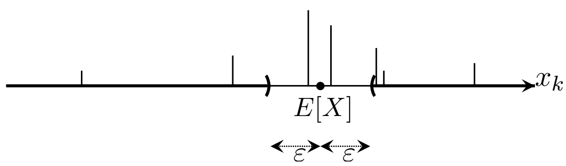
Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire.
Alors $\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$.

Rappel : $|X - E[X]| < \varepsilon \iff E[X] - \varepsilon < X < E[X] + \varepsilon$

Et donc $|X - E[X]| \geqslant \varepsilon \iff X \leqslant E[X] - \varepsilon$ ou $X \geqslant E[X] + \varepsilon$





Exemple : X est une variable aléatoire telle que $E(X) = 200$ et $V(X) = 5$.

Déterminer une minoration de la probabilité que X soit strictement entre 190 et 210.