

SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1.

1. Écrire les expressions suivantes sans signe Σ ni Π (avec des \dots si besoin) :

$$\sum_{i=1}^{10} \sqrt{i} \quad \sum_{p=1}^n (3p)^2 \quad \sum_{k=0}^5 (k+1)^3 \quad \prod_{n=0}^6 (2n+3) \quad \sum_{m=3}^{11} \frac{(-1)^m}{m} \quad \sum_{p=1}^7 \left(\frac{1}{6}\right)^p$$

2. Écrire les expressions suivantes avec un signe Σ ou Π :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{11} \quad ; \quad B(n) = (4-1)(8-1)\dots(2^n-1) \quad ; \quad C = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{12}{13}$$

$$D = 10 + 20 + \dots + 140 \quad \text{puis} \quad E = 100 + 110 + 120 + \dots + 240$$

3. Écrire la somme suivante sans le signe Σ puis la calculer : $\sum_{k=0}^{2020} (-1)^k$.

Exercice 2.

Compléter chacun des calculs suivants (en écrivant les justifications!) :

$$\sum_{k=0}^{17} 3^{k+2} = \sum_{n=\dots}^{\dots} 3^n \quad \sum_{i=11}^{20} 2^i = \sum_{k=1}^{\dots} \dots \quad \prod_{k=1}^n e^k = \prod_{p=2}^{\dots} \dots$$

Exercice 3.

Écrire chacune des sommes suivantes avec un signe Σ et les calculer :

$$S_1 = 2 + 7 + 12 + \dots + 77 + 82$$

$$S_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{3}{1024}$$

$$S_2 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots + 1024 - 2048$$

Exercice 4.

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^7 (-3)^k \quad S_2 = \sum_{k=0}^7 (-3k) \quad S_3 = \sum_{m=4}^{11} \frac{1}{5^m} \quad S_4(\ell) = \sum_{p=0}^{\ell} 3^{p+2}$$

$$S_5 = \sum_{k=3}^{60} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2} \text{ en utilisant le changement d'indice } j = k - 2.$$

Exercice 5.

On note $S = \sum_{k=1}^5 (k^3 - (k+1)^3)$.

Écrire S sans symbole Σ et la calculer.

Exercice 6. Téléscopage.

Calculer : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$; $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$; $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ puis $Q_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Indication pour T_n : $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$

Exercice 7.

1. Simplifier les fractions suivantes : $\frac{18!}{16!}$; $\frac{30!}{27! \cdot 3!}$; $\frac{(n+1)!}{n!}$; $\frac{n!}{(n-1)!}$ et $\frac{n!}{(n+2)!}$.

2. Écrire à l'aide de factorielles, les produits $A = 24 \times 23 \times 22 \times \dots \times 5 \times 4$ puis $B(n) = 8 \times 9 \times 10 \times \dots \times n$.

3. Factoriser $n! - 2(n-2)!$.