Calcul matriciel.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Dans chaque cas, écrire la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leq n,\ 1 \leqslant j \leq p}$ telle que

1. $n = 2,\ p = 3$ et $a_{i,j} = i + j$

2. $n = 4,\ p = 3$ et $a_{i,j} = \min(i, j)$

3. $n = 3,\ p = 3$ et $a_{i,j} = \cos(\frac{i\pi}{3})\sin(\frac{j\pi}{3})$

4. $n = 4,\ p = 4$ et $a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lorsque c'est possible, calculer les matrices suivantes :

$C + E,\quad AB,\quad BA,\quad AI_3,\quad I_3A,\quad AB + AE,\quad 2D - 3F,\quad DF,\quad EF - 2A,\quad BD,\quad AB + DF.$

☞ Exercice 3.

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n - 3v_n.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer u_1, v_1, puis u_2, v_2.

2. Donner X_0, X_1 et X_2.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$.

☞ Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $J = 2I - A$.

1. Calculer J, J^2 et J^3, en déduire une expression de J^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. En déduire une expression de A^n pour tout $n \geqslant 2$.
La formule est-elle aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$?

☞ Exercice 5.

La matrice A est définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

★ **2.** Déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$ une expression de A^n.

★ Exercice 7.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit AX.

2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que A n'est pas inversible.

Exercice 8.

Soit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et X et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ notées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement le système $AX = B$ et le résoudre.

2. En déduire que A est inversible et déterminer l'inverse de A.

Exercice 9.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui calculer leurs inverses.

☞$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☞$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☞ Exercice 10.

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

3. Donner D^n pour tout entier naturel n.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

5. Donner la matrice M^n sous forme d'un tableau de nombres.

Exercice 11.

Soient $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = 2I + B$.

2. Calculer B^2.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_nI + v_nB$.
On vérifiera que $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

★ Exercice 12.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et A la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $a_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$. Calculer $A\bar{A}$ et en déduire A^{-1}.