Calcul matriciel

Le mot « matrice » provient du latin *matrix*, lui même dérivé de *mater*, la mère. Ce terme est employé dans de nombreux domaines, pour désigner un élément fondateur, une structure à partir de laquelle on construit.
En mathématiques, les matrices sont sous forme de tableau de nombres, et elles caractérisent un système linéaire. Elles ont des applications en probabilités, pour l'étude de suites ... c'est alors une matrice qui définit la transition entre les termes successifs des suites, et permet donc leur construction.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$: c'est l'ensemble des coefficients ou ***scalaires*** avec lesquels nous travaillerons.

I. Généralités sur les matrices

1) Qu'est-ce qu'une matrice ? (rappels)

Une matrice est un tableau de nombres de $\mathbb{K}$ de taille prédéfinie.

Par exemple, on définit la matrice A par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1,3 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
C'est une matrice « 2 lignes 3 colonnes » ou « de taille 2×3 », à coefficients dans $\mathbb{R}$.
L'élément ou ***coefficient*** de la 2ième ligne et première colonne est -4, et on peut noter $a_{2,1} = -4$.

Voici une matrice « 3 lignes 2 colonnes » à coefficients dans $\mathbb{C}$:

Définition.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une matrice A de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ est le coefficient de la matrice A situé à la ligne i et à la colonne j.
On peut noter $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) Matrices particulières :

- La ***matrice nulle***, dont tous les coefficients sont 0 : on peut la noter $0_{n,p}$ lorsqu'elle est formée de n lignes et p colonnes, ainsi $0_{2,3} =$
- Les ***matrices colonnes*** sont des matrices $n \times 1$: $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$, par exemple
- De même, les ***matrices lignes*** sont des matrices $1 \times p$: $\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, par exemple
- Les ***matrices carrées*** ont autant de lignes que de colonnes (c'est-à-dire $n = p$). On peut noter leur ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
  Parmi les matrices carrées, on trouve :
  - des matrices ***triangulaires supérieures*** : ce sont des matrices qui n'ont que des 0 en bas et à gauche, et sont donc intéressantes sur la diagonale et en haut à droite : $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$.
  - des matrices ***triangulaires inférieures*** : matrices qui n'ont des nombres éventuellement non nuls que sur la diagonale et en bas à gauche : $\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, par exemple

    $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est triangulaire inférieure si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \dots$

- des matrices ***diagonales*** : des 0 partout, sauf éventuellement sur la diagonale $\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

  par exemple

  $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est diagonale si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ldots$

La ***matrice identité*** est une matrice diagonale particulière qui a des 1 sur la diagonale :

on la note I_n où n précise la taille de la matrice, par exemple $I_3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

II. Opérations sur les matrices

Dans toute cette partie, on utilisera les notations habituelles pour les coefficients :
$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$,

1) Addition et soustraction de deux matrices

On peut ajouter (ou soustraire) deux matrices de même taille : on ajoute (ou soustrait) terme à terme.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+3i \\ -4 & -2i & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Alors $A + B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $A - B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Définition.

Soient A et B deux matrices de même taille n lignes et p colonnes.
La ***matrice somme*** $A+B$ a aussi n lignes et p colonnes et est définie par
$\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}}$.

2) Multiplication par un nombre

On peut multiplier une matrice par un nombre : il suffit de multiplier tous les coefficients de la matrice par ce nombre : toujours avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+3i \\ -4 & -2i & 5 \end{pmatrix}$, on a $3A = \Bigg($

Ainsi, $\boxed{\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}}$.

Remarque : $1A = A$, $0A = O_{n,p}$, $-1A$ se note $-A$.

3) Produit de deux matrices

Pour pouvoir faire le produit AB il faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B. La matrice résultat aura le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

« « $(n,p).(p,m) \to (n,m)$ » »

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On va calculer le produit AB. Pour cela on utilise la disposition pratique suivante :

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1\times 7 + 4\times 1 & -1\times(-3) + 4\times 4 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 2\times 7 + 0\times 1 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} -3 & 19 & -4 & 1 \\ 14 & -6 & 0 & -2 \\ 19 & -17 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Définition.

Soient A une matrice n lignes et p colonnes et B une matrice p lignes et q colonnes.
La ***matrice produit*** $A \times B$ (notée aussi AB) est une matrice C qui a n lignes et q colonnes, et dont les coefficients sont définis par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$.

4) Produits particuliers

a. avec la matrice identité

si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\boxed{AI_p = A}$ et $\boxed{I_n A = A}$

b. matrices diagonales

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{donc } AB = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Pour faire le produit de deux matrices diagonales, il suffit de faire le produit des coefficients diagonaux.

c. produit d'une matrice par une colonne : AX

On note A_1, A_2, $\dots A_p$ les colonnes de A de sorte que $A = \left(A_1 \middle| A_2 \middle| \quad \dots \quad \middle| A_p \right)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Alors $AX =$

Conséquence : toujours avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$:

$AX = B \iff$

Cas particulier : si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors AX est ...

De même avec les matrices E_i qui sont des matrices colonnes, nulles partout sauf un 1 sur la ligne i :

AE_i est ...

Attention : en général $\boxed{A \times B \neq B \times A}$ même si les tailles rendent les deux opérations faisables !!

5) Règles de calcul

Propriété.

On a les règles de calcul suivantes (on suppose les tailles compatibles).

- Avec $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, on peut donc noter sans ambiguïté λAB.
- La somme est commutative et associative : ....
- Le produit est associatif : $(AB)C = A(BC)$, on peut donc noter ABC.
- Le produit est distributif par rapport à la somme, à gauche et à droite :
  $C(A+B) = CA + CB$ et $(A+B)C = AC + BC$.
- $0_{n,p}$ est neutre pour l'addition : $0_{n,p} + A = A$;
  I est neutre pour la multiplication : $IA = AI = A$.

On peut donc factoriser, développer ... comme avec des nombres mais avec quelques précautions en plus (produit non commutatif, matrice identité qui remplace le 1).

Par exemple : avec des nombres $x^2 - x = x(x-1)$, dans le cas de matrices, c'est I qui joue le rôle du 1 : $\boxed{A^2 - A = A(A-I)}$, et $\boxed{A^2 + 3A = A(A+3I)}$.

III. Les matrices carrées

1) Puissances

Pour des raisons de dimensions, il n'est possible de calculer $A \times A$ que lorsque A est une matrice carrée, et on peut alors calculer $A \times A \times A$ ...

Dans ce cas, la même notation que pour les nombres est utilisée pour les matrices : $\boxed{A^3 = A \times A \times A}$ ...

En particulier $\boxed{A^0 = I}$ et $\boxed{A^1 = A}$.

Les mêmes règles s'appliquent alors, par exemple $A^3 \times A^2 = \ldots\ldots$

Attention : en général, $(AB)^n \neq A^n B^n$.

a. cas des matrices diagonales

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice diagonale est obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.

Par exemple avec $D = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n =$

b. utilisation de la formule du binôme de Newton

Rappel : la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances d'une somme :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a^0 b^n + n a^1 b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 b^{n-3} + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + n a^{n-1} b^1 + a^n b^0\end{aligned}$$

Pour des matrices, on peut appliquer cette formule à deux matrices <u>A et B qui commutent c'est-à-dire $AB = BA$</u>, en général on l'applique à une matrice A et une autre de la forme xI.

Exemple avec A et $-\frac{1}{2}I$, pour $n = 4$:
$A(-\frac{1}{2}I) = -\frac{1}{2}AI = -\frac{1}{2}A$ et $(-\frac{1}{2}I)A = -\frac{1}{2}IA = -\frac{1}{2}A$, donc on peut appliquer la formule :

$(A - \frac{1}{2}I)^4 = \ldots$

Application : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on cherche une expression de M^n.

1. On pose $B = M - 2I$. Calculer B, B^2, B^3. Que penser de B^k pour $k \geqslant 3$?

2. En déduire une expression simple de M^n en fonction de B pour $n \geqslant 2$.

2) Inverses

Définitions.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est ***inversible*** si il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.
En cas d'existence, cette matrice B est appelée ***l'inverse*** de A et est notée A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles de taille n est appelé ***groupe linéaire*** et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque : si A est inversible, $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$.

Attention : toutes les matrices n'ont pas d'inverse, on ne peut donc pas écrire ni utiliser A^{-1} avant d'avoir vérifié que cet inverse existait.

Propriété.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Les propositions suivantes sont équivalentes :
  - (i) $AB = I_n$ (autrement dit A est inversible à droite)
  - (ii) $BA = I_n$ (autrement dit A est inversible à gauche)
  - (iii) A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration du dernier point : ....

Propriété.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si pour tout B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = B$ a une unique solution.
Dans ce cas, la solution est $X = A^{-1}B$.

Remarque :

Résoudre l'équation $AX = B$ revient à trouver $x_1, x_2 \dots x_n$ tels que
$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + & \dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + & \dots & +a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$
Ainsi, A est inversible si et seulement si le nombre de pivots du système est égal à n.

Propriété.

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

Méthodes pour justifier l'existence d'un inverse et le déterminer :

- Si on dispose d'une relation nous permettant de trouver une matrice B telle que $AB = I$, alors A est inversible et son inverse est B.
- « Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne quelconque, on résout le système $AX = B$ » :
  - si le système a une unique solution, alors A est inversible et A^{-1} est la matrice formée par les coefficients des b_1, $b_2 \dots b_n$;
  - sinon, la matrice A n'est pas inversible.
- On peut travailler sur la matrice augmentée $(A|I)$, faire des opérations élémentaires du pivot de Gauss (simultanément sur A et I) pour transformer A en matrice échelonnée réduite :
  - si la matrice échelonnée réduite est I, alors A est inversible et l'inverse est la matrice obtenue dans la colonne de droite;
  - sinon, la matrice A n'est pas inversible.

Exemples :

1. La matrice A est définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant un système.

3. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice augmentée avec I.