Étude de fonctions.

Exercice 1.

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau des variations pour x positif est donné ci-contre.
On précise que $f(7) = 0$.

x	0		2		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1. On suppose que f est paire, déterminer son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ et résoudre $f(x) \leqslant 0$.

2. Mêmes questions si f est impaire.

Exercice 2.

Après avoir précisé l'ensemble de définition des fonctions suivantes, étudier leur parité.
$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ $\quad g(x) = x^3 - 3x - \frac{2}{x}$ $\quad h(x) = 5(x-3)^2$ $\quad k(x) = \frac{-3x^2+1}{\sqrt{x^4+2}}$

Exercice 3.

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec f paire et g impaire. On admet que les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$, étudier alors leur parité :
$h_1 : x \mapsto f(x)g(x)$ $\quad h_2 : x \mapsto f \circ g(x)$ $\quad h_3 : x \mapsto f(x)g(x)x^3$ $\quad h_4 : x \mapsto |g(x)|$

Exercice 4.

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x-1)$ est paire.

3. En déduire que la courbe de f a un axe de symétrie que l'on précisera.

Exercice 5.

Étudier la parité, imparité et périodicité des fonctions cos, sin et tan, et en déduire le plus petit domaine d'étude possible pour chacune puis les transformations nécessaires pour reconstituer toute la courbe.

Exercice 6.

Étudier la périodicité de $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ et de $g : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ puis de $f + g$.

Exercice 7.

Soit $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, et son ensemble de dérivabilité.

2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus petit possible.

3. Étudier les variations de f et préciser ses extrema éventuels.

4. Justifier que f réalise une bijection de $[0, \pi[$ sur un intervalle à préciser.

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 0, et en $\frac{\pi}{2}$.
Que se passe-t-il pour la tangente en π ?

6. Tracer l'allure du graphique de f.

Exercice 8.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
Déterminer sa réciproque.

2. Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 3$? et l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$?

Exercice 9.

Pour quelles valeurs de α la fonction $x \mapsto x^3 + \alpha x + 1$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

* Exercice 10.

Montrer que si f est impaire et bijective, sa bijection réciproque est impaire.