Étude de fonctions

I. Propriétés des fonctions

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Parité, imparité, périodicité

Définition.

Soit f une fonction.
On suppose que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 (autrement dit : pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$).

- f est ***paire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$.
- f est ***impaire*** signifie : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = -\Big(f(x)\Big)$.

Remarque : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, $[-5,5]$ … sont symétriques par rapport à l'origine,
mais $\mathbb{R}^+$, $[-1;1[$, $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ … ne le sont pas.

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :

La courbe d'une fonction paire est ……………………………………………………………………

La courbe d'une fonction impaire est ……………………………………………………………………

Donc lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on étudie $f|_{\mathbb{R}^+\cap\mathcal{D}_f}$ et on déduit l'autre partie par symétrie.

Exemples : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + \frac{3}{x}$, $h(x) = x^3 - x^2 + 1$: ces fonctions sont-elles paires ? impaires ?

Méthode pour une fonction f dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à l'origine :

- pour montrer que f est paire ou impaire, il faut calculer $f(-x)$ pour <u>un x quelconque</u> de $\mathcal{D}_f$ (remplacer tous les x par $(-x)$ dans l'expression de f) et transformer l'expression pour faire apparaître $f(x)$ ou $-f(x)$ (éventuellement, expliciter $-(f(x))$).
- pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il faut un contre-exemple, c'est-à-dire trouver <u>une valeur</u> de x pour laquelle $f(-x)$ n'est égal ni à $f(x)$ ni à $-f(x)$: on remplace x par un nombre, et on fait le calcul de $f(x)$, et celui de $f(-x)$.

Définition.

Soit T un réel strictement positif.
Une fonction f est dite ***périodique de période*** T, ou T-***périodique*** lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x + T \in \mathcal{D}_f \ \text{ et } \ f(x+T) = f(x)$$

Exemples : les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ou 2π-périodiques).

Interprétation graphique et conséquence sur l'étude de fonction :
La courbe d'une fonction T-périodique est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Ainsi, il suffit d'étudier f sur une période (un intervalle de longueur T, par exemple $[0,T]\cap\mathcal{D}_f$ ou $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\cap\mathcal{D}_f$).
Ensuite on déduit le reste de la courbe par translations.

Exemple : montrer que $f : x \mapsto \cos(3x + \frac{1}{2})$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique.

Propriété.

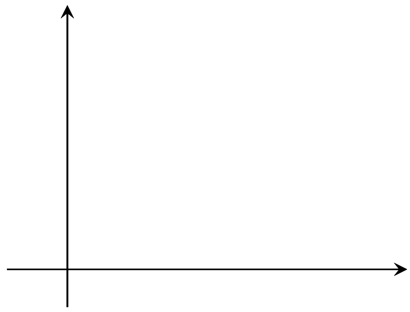
Soient $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $\phi \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$ et $x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$ sont $\frac{2\pi}{\omega}$-périodiques.

2) Variations, majoration et minoration

Caractérisations de la croissance d'une fonction.

Une fonction f est dite ***croissante sur un ensemble*** $\mathcal{D}$ si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

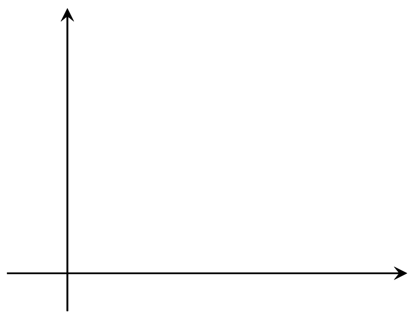
- ⋆ sa courbe représentative monte dans la partie correspondant à $\mathcal{D}$.
- ⋆ si x augmente (en restant dans $\mathcal{D}$), alors $f(x)$ augmente.
- ⋆ pour a et b dans $\mathcal{D}$: $a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- ⋆ les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre « f conserve l'ordre ».
- ⋆ lorsque $\mathcal{D}$ est un intervalle et que f est dérivable sur $\mathcal{D}$:
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) \geqslant 0.$$



Caractérisations de la décroissance d'une fonction.

Et une fonction f est ***décroissante sur*** $\mathcal{D}$ si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

- ⋆ ....
- ⋆ ....
- ⋆ ....
- ⋆ ....
  ....
- ⋆ ....



Vocabulaire : une fonction f est dite ***monotone*** si elle est croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, ou si elle est décroissante sur $\mathcal{D}_f$.
Remarque importante : si pour a et b dans $\mathcal{D}$ tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$, alors f est dite ***strictement croissante sur*** $\mathcal{D}$. C'est le cas aussi avec lorsque si $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
Même chose avec ***strictement décroissante***, et cela s'applique de la même façon à la monotonie : strictement monotone si strictement croissante, ou si strictement décroissante.

Exemple : on note pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Cette fonction est ...

En effet :

Définitions.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f est ***majorée*** lorsque : ....
  M est appelé ***majorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
  (autrement dit : il existe un réel M tel que les valeurs prises par la fonction f sont toutes plus petites que M)
- On dit que f est ***minorée*** lorsque : ....
  m est un nombre, appelé un ***minorant*** de f sur $\mathcal{D}_f$.
- On dit que f est ***bornée*** si elle est majorée et minorée sur $\mathcal{D}_f$.
  Autrement dit ....

Remarques : f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Avec $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f est majorée par M sur I si pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$, autrement dit $f|_I$ est majorée par M.

Définitions.

f est une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f admet un ***maximum global*** (respectivement ***minimum global***) en a si :

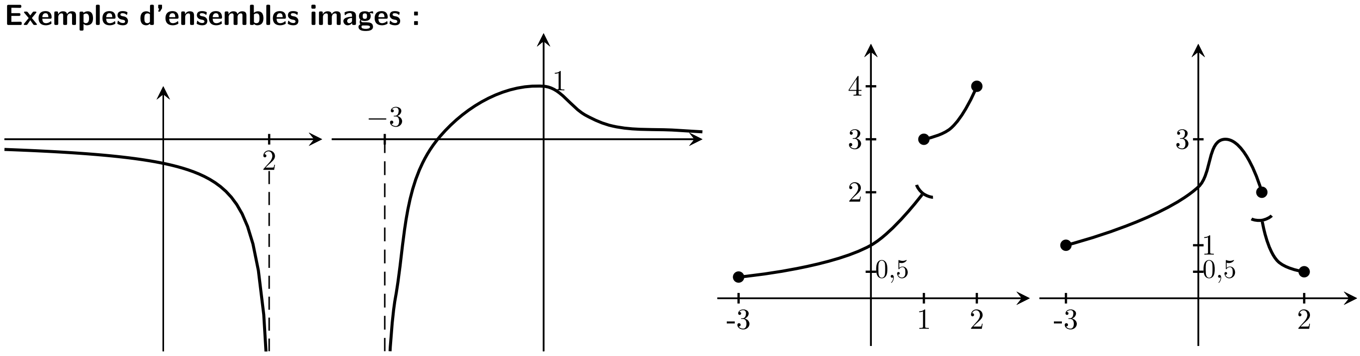
  ....

- On dit que f admet un ***maximum local*** (respectivement ***minimum local***) en a si :
  $\exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta; a+\delta[\cap \mathcal{D}_f,\ f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).

Illustrations et exemples :

II. Bijection et réciproque

Exemples d'ensembles images :



$I =]-\infty; 2[$
$f(I) =$

$I_1 =]-3; +\infty[$
$g(I_1) =$
$I_2 =]-3, 0]$
$g(I_2) =$

$I = [-3; 2]$
$h(I) =$

$I = [-3; 2]$
$k(I) =$

1) bijection

Définition(rappel).

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$.

f est une ***bijection*** de I dans J si ....

Autrement dit : ....

Méthode pour montrer qu'une fonction est une bijection : si la fonction est *strictement* monotone sur un intervalle I, elle réalise une bijection de cet intervalle dans $f(I)$.
Pour déterminer $f(I)$, on se base pour l'instant sur le tableau de variations (justifié !) complet avec limites aux bornes et/ou extrema.

Exemple : la fonction f est définie sur $]-\infty;4]$ et on donne le tableau de ses variations.

x	$-\infty$	2	4
$f(x)$	7 $\searrow$	-10	$\nearrow$ -3

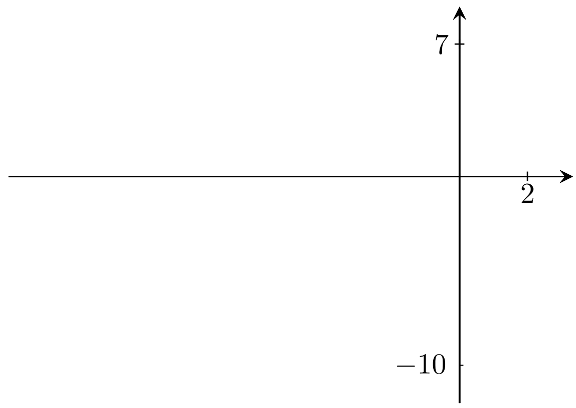
D'après ce tableau, on peut affirmer que f est une bijection de .... dans ....
Ou encore, ...

2) réciproque

La fonction f précédente réalise une bijection de $]-\infty;2]$ sur $[-10;7[$.
Ainsi, tout nombre y entre -10 et 7 a un unique antécédent par f dans $]-\infty;2]$, c'est-à-dire un nombre x de $]-\infty;2]$ tel que $f(x)=y$.
Ce procédé définit la fonction réciproque de f, notée f^{-1}.

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} [-10;7[& \to &]-\infty;2] \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x)=y \end{array}.$$

Ainsi par exemple $f^{-1}(\dots)=\dots$ car $f(2)=-10$.



Rappel : Si f est une bijection de I dans J, on appelle réciproque de f la fonction notée f^{-1}, qui à tout nombre y de J associe son unique antécédent x par f, c'est-à-dire : $\boxed{f^{-1}: \begin{array}{ccc} J & \to & I \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } f(x)=y \end{array}}$

En particulier : $\boxed{f(x)=y \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)}$.

Propriété.

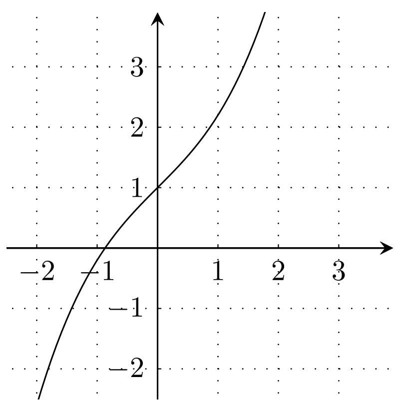
Soit f une fonction continue et dérivable, qui réalise une bijection de I dans J. Alors :

- son application réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f ;
- f^{-1} est dérivable (sauf aux points $f(a)$ si $f'(a)=0$) et $\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$
- la représentation de f^{-1} se déduit de celle de f par symétrie par rapport à la droite $y=x$.

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{5}x^3+x+1$.

Justifier que f est une bijection, préciser l'ensemble de définition de sa réciproque, ainsi que ses variations.

La courbe représentative de f est tracée ci-dessous. Sur le même graphique, représenter f^{-1}.



Remarque : comme c'est le cas dans l'exemple précédent, il se peut que l'on ne puisse pas trouver d'expression simple pour f^{-1}, bien que l'on connaisse certaines de ses caractéristiques (ensemble de définition, variations, courbe ...)