Dénombrement

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

★ Exercice 1.

1. Résultat préliminaire : E, F et G sont trois ensembles, u est une application bijective de E dans F, et v est une application bijective de F dans G.
Montrer que $v \circ u$ est bijective.

2. Soient E et F deux ensembles, on suppose que E est fini de cardinal n, et qu'il existe une application f bijective de E dans F.
Montrer que F est de cardinal n.

★ Exercice 2.

Soient E et F deux ensembles de même cardinal, et f une application de E dans F.

1. On suppose f injective, montrer que f est bijective.
En déduire que dans cette situation : f est injective $\Longleftrightarrow$ f est bijective.

2. On suppose f surjective, montrer que f est bijective.
En déduire que dans cette situation : f est surjective $\Longleftrightarrow$ f est bijective.

☞ Exercice 3.

1. Simplifier les fractions suivantes: $\dfrac{18!}{16!}$ $\dfrac{30!}{27!\,3!}$ $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ $\dfrac{n!}{(n+2)!}$ et $\dfrac{n!}{(n-4)!}$.

2. Écrire à l'aide de factorielles, les produits $A = 24\times 23\times 22\times\ldots\times 5\times 4$ puis $B(n) = 8\times 9\times 10\times\ldots\times n$.

3. Factoriser $n! - 2(n-2)!$.

Exercise 4.

In a group of 40 teenagers, 30 study spanish, and 7 don't study french.
We also know that 6 of them study neither spanish nor french.
How many study both languages ?

Exercice 5.

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

1. On tire simultanément 7 boules de l'urne.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(b) Combien de résultats ne comportent pas la boule 1 ?

(c) Soit $p \in [\![7, 20]\!]$, déterminer (en fonction de p) le nombre de tirages possibles pour lesquels p est le plus grand numéro tiré.

2. On tire successivement et sans remise k boules de l'urne, et on note les numéros tirés dans l'ordre d'apparition.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(b) Combien y a-t-il de tirages possibles commençant par la boule 1 ?

3. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne, et on note dans l'ordre les numéros tirés.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(b) Combien y a-t-il de tirages possibles contenant au moins une fois le numéro 20 ?

★ **(c)** Combien y a-t-il de tirages possibles où seulement deux numéros distincts sont apparus ?
Et si on veut au maximum deux numéros distincts ?

☞ Exercice 6.

1. Combien y a-t-il de codes de carte bancaires possible ?

2. Pour décorer leur sapin de Noël, des élèves décident d'acheter une grande guirlande électrique, un sapin, et un mini attelage de rennes avec son traîneau. Ils se rendent dans un magasin, et constatent qu'ils ont le choix parmi 7 guirlandes, 12 sapins et 8 mini attelages.
De combien de manière différentes peuvent-ils décorer la salle ?

Exercice 7.

On étudie un groupe de 5 étudiants qui sont responsables de l'association des sports dans une école d'ingénieurs, on les note A, B, C, D et E.

1. Parmi ces 5 personnes, 3 vont être tirées au sort pour participer à une rencontre avec une autre école d'ingénieurs.
Combien de trios est-il possible de former ? Les écrire tous.

2. Parmi ces 5 personnes, il faut choisir un président, un trésorier et un secrétaire pour former le bureau. Écrire des exemples de bureaux que l'on peut former. Combien y en a-t-il ?

Exercice 8.

On répartit neuf paires de chaussettes différentes dans trois tiroirs (assez grands pour éventuellement contenir toutes les paires).

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

2. Même question en supposant que le premier tiroir reste vide.

3. Même question en supposant qu'exactement un tiroir reste vide.

4. Même question en supposant qu'au moins un tiroir reste vide.

Exercice 9.

Un jury est composé de 4 membres tirés au sort parmi 6 hommes (dont M. A) et 5 femmes (dont Mme B).

1. Combien de jurys différents peut-on former ?

2. Combien de jurys comportant 2 hommes et 2 femmes peut-on former ?

3. Combien de jurys mixtes peut-on former ? (au moins un homme et au moins une femme)

4. M. A refuse de siéger avec Mme B. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

☞ Exercice 10.

1. Combien de files indiennes différentes peuvent former 10 enfants ?

2. Combien y a-t-il de nombres entiers formés de 4 chiffres supérieurs ou égaux à 5 ? Et si l'on veut que ces 4 chiffres soient tous distincts ?

3. Lors d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10, combien de choix sont possibles ?

4. De combien de façons différentes peut-on répartir 10 personnes sur une rangée de 12 chaises ?

Exercice 11.

1. Calculer les nombres ou expressions suivant(e)s : $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{35}{33}$ $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2}$.

2. Montrer en utilisant les formules, que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

3. Résoudre l'équation $\binom{n}{2} = 15$ pour $n \in [\![2, +\infty[\![$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$.