

# DÉNOMBREMENT

## \* Exercice 1.

1. Résultat préliminaire :  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont trois ensembles,  $u$  est une application bijective de  $E$  dans  $F$ , et  $v$  est une application bijective de  $F$  dans  $G$ .

Montrer que  $v \circ u$  est bijective.

2. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles, on suppose que  $E$  est fini de cardinal  $n$ , et qu'il existe une application  $f$  bijective de  $E$  dans  $F$ .

Montrer que  $F$  est de cardinal  $n$ .

## \* Exercice 2.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles de même cardinal, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. On suppose  $f$  injective, montrer que  $f$  est bijective.

En déduire que dans cette situation :  $f$  est injective  $\iff f$  est bijective.

2. On suppose  $f$  surjective, montrer que  $f$  est bijective.

En déduire que dans cette situation :  $f$  est surjective  $\iff f$  est bijective.

## Exercice 3.

Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes, on sait que 24 font du tennis et 15 du canoë.

De plus on note que 6 personnes pratiquent à la fois tennis et canoë.

Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

## Exercice 4.

Dans une classe de 40 élèves, 30 élèves étudient l'espagnol, et 7 élèves n'étudient pas l'anglais. On sait de plus que 6 élèves n'étudient ni l'espagnol ni l'anglais.

Combien d'élèves étudient les deux langues ?

## Exercice 5.

On lance 3 fois de suite un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6), et on note les numéros dans l'ordre où on les a obtenus.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2. Combien y a-t-il de résultats possibles avec 3 numéros distincts ? et avec 3 numéros identiques ?

3. Combien de résultats ne comportent aucun 6 ? combien en comportent au moins un ?

4. Combien de résultats comportent exactement un 6 ?

5. Combien de résultats ont un total de 18 points ? de 17 points ?

**Bonus.** Écrire un programme Python qui affiche tous les résultats possibles des questions 1. et 2..

## Exercice 6.

On étudie un groupe de 5 personnes qui travaillent dans une association, notées  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$ .

1. Parmi ces 5 personnes, 3 vont être tirées au sort pour participer à un voyage. Écrire toutes les possibilités de trios qui participeront au voyage.

2. Parmi ces 5 personnes, il faut choisir un président, un trésorier et un secrétaire pour former le bureau. Écrire des exemples de bureaux que l'on peut former. Combien y en a-t-il ?

## Exercice 7.

Un chef d'entreprise a 20 candidats pour 4 postes. Il doit faire sa sélection.

1. Quel est le nombre de choix possibles ?

Les 20 candidats se répartissent en fait en 13 femmes et 7 hommes.

2. Adèle est l'une des 13 femmes, combien de choix possibles y a-t-il avec elle ?

3. Combien y a-t-il de choix possibles avec au moins une femme et au moins un homme dans les 4 candidats choisis ?

**Exercice 8.**

- Combien de files indiennes différentes peuvent former 10 enfants ?
- Combien y a-t-il de nombres entiers formés de 4 chiffres supérieurs ou égaux à 5 ? Et si l'on veut que ces 4 chiffres soient tous distincts ?
- Dans son armoire, Gertrude a 4 pantalons, 3 vestes, 5 chemises et 2 bonnets. Une tenue est constituée d'un pantalon, une veste, une chemise et un bonnet. Combien de tenues peut former Gertrude ?
- Lors d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10, combien de choix sont possibles ? Un élève décide de tirer au hasard les 8 exercices qu'il traite, quelle est la probabilité que le hasard lui donne à traiter les huit premiers ?
- De combien de façons différentes peut-on répartir  $p$  personnes sur une rangée de  $n$  chaises ?

**Exercice 9.**

Sur son téléphone, Maxime a 15 morceaux de musique.

- Il enclenche le mode « aléatoire ». Combien de possibilités d'écoute cela fait-il ?
- Sur son trajet pour venir au lycée le matin, Maxime a le temps d'écouter 6 morceaux : combien de possibilités a-t-il ?  
Combien d'écoutes sont possibles si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel ces trois morceaux seront écoutés ?

**Exercice 10.**

- Calculer les nombres ou expressions suivant(e)s :  $\binom{7}{0}$   $\binom{7}{3}$   $\binom{7}{4}$   $\binom{35}{33}$   $\binom{n}{n-1}$  et  $\binom{n}{2}$ .
- Montrer en utilisant les formules, que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ .
- Résoudre l'équation  $\binom{n}{2} = 15$  pour  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , simplifier  $\frac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$ .

**Exercice 11.**

- Développer  $(2x - 1)^5$ , puis  $(a + 2b)^4$  puis  $(1 - \sqrt{3})^5$ .
- Quel est le coefficient de  $x^3$  dans l'expression  $(2 + \frac{1}{2}x)^8$  ? et dans l'expression  $(1 - 2x)^7$  ?
- Exprimer en fonction de  $n$  les sommes suivantes :  

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 5^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k.$$
- \* Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$  est un entier.

**\* Exercice 12.**

- On considère  $n$  boules, et deux boîtes  $A$  et  $B$ . On veut répartir  $p$  boules parmi les  $n$  dans les deux boîtes  $A$  et  $B$ , en en mettant une dans la boîte  $A$  et  $p - 1$  dans la boîte  $B$ .  
En dénombrant les répartitions possibles de deux manières différentes, montrer que  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ .
- Application : calculer  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ .