Dénombrement

Compter, dénombrer, est un processus naturel et concret ... on peut compter le nombre d'objets dans un sac, mais aussi le nombre de façons de choisir 3 représentants dans une assemblée, ou le nombre de dispositions de personnes autour d'une table, le nombre de rangements possibles de livres sur des étagères ...
La résolution de ce type de problèmes constitue une branche des mathématiques appelée **combinatoire**. Elle s'est beaucoup développée à partir du 17ème siècle, en lien notamment avec des jeux de hasard et des probabilités (Pascal, Fermat).

Lorsqu'il s'agit de dénombrer des ensembles infinis comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ... les théories (initiées par Cantor) sont beaucoup plus complexes et donnent lieu à des résultats parfois perturbants ... Nous nous contenterons dans ce chapitre de dénombrer des ensembles finis !

I. Cardinal

Définition.

Un ensemble E est ***fini*** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$. L'entier n est alors appelé le ***cardinal*** de E, noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.
Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Remarque : le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Exemples : L'ensemble $A = \{a; -3; \pi\}$ ....

....

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ ....

$[\![5; 11]\!]$ ....

Propriété.

E et F sont deux ensembles, E est fini.
Si il existe une application bijective de E dans F, alors F est fini de même cardinal que E.

Démonstration : voir exercice **1.**.

1) Cardinaux et opérations

Propriété.

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors A est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
De plus, $A = E$ si et seulement si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$.

Méthode : pour montrer que deux ensembles finis sont égaux, on peut donc montrer que l'un est inclus dans l'autre et qu'ils ont même cardinal.

Propriété.

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.
Alors :
- $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$;
- $\mathrm{Card}(B \backslash A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$;
- $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$;
  si A et B sont disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Illustration :

Conséquence : si $A_1,\ A_2,\ \dots A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E deux à deux disjointes, alors $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\text{Card}(A_k)$.

2) Cardinaux et applications

Propriété.

E et F sont deux ensembles finis, et f est une application de E dans F.
- Si f est injective, alors Card(E)...Card(F).
- Si f est surjective, alors Card(E)...Card(F).
- Si f est bijective, alors ...
- Si E et F ont même cardinal, alors f injective $\Longleftrightarrow$ f bijective $\Longleftrightarrow$ f surjective.

Illustration : (voir l'exercice **2.** pour la preuve du dernier point)

II. Dénombrement

1) Tirages successifs dans des ensembles différents : produit cartésien

Rappel : $E \times F = \dots$

Situation caractéristique :

★ E et F sont deux sacs qui contiennent des jetons numérotés, on pioche un élément dans le sac E, puis un dans le sac F et on note dans l'ordre les numéros obtenus : on forme un couple (x, y) qui est dans l'ensemble $E \times F$.

Théorème.

- Soient E et F deux ensembles finis, alors Card($E \times F$) =Card(E)×Card(F).
- Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ des ensembles finis, alors $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n}\text{Card}(E_k)$.

Justification pour $E \times F$ avec $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$.

Exemple : À la cantine, les élèves ont droit à un menu constitué d'une entrée, un plat et un dessert. Il y a 3 entrées possibles, 2 plats et 4 desserts, combien de menus différents peut-on constituer ?

2) Tirages successifs dans un même ensemble : les p-uplets

a. Cas général avec remise possible

On rappelle que, si E est un ensemble fini, un ***p-uplet*** (ou ***p-liste***) d'éléments de E est un élément de E^p, c'est-à-dire une succession ordonnée de p éléments de E.
On le note généralement $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où chaque x_i est un élément de E.

Situations caractéristiques :

★ On imagine que l'ensemble E est un sac et que ses éléments sont des jetons (tous numérotés) dans le sac : former un p-uplet revient à piocher p fois dans l'ensemble E, en notant dans l'ordre les numéros et en remettant à chaque fois dans le sac, le jeton pioché.

▲ Former un p-uplet d'éléments de E revient aussi à construire une application f de $[\![1, p]\!]$ dans E. Si l'on note $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le p-uplet, alors f est définie par : $\forall k \in [\![1, p]\!], f(k) = x_k$.
Plus généralement, l'ensemble de départ peut être n'importe quel ensemble de cardinal p.

Théorème.
Si E est de cardinal n, le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

En effet,

Exemple : on lance 10 fois un dé, combien de résultats différents peut-on obtenir ?

Exemples usuels d'utilisation des p-listes en dénombrement : lancers de pièce successifs, lancers de dé successifs, tirages successifs avec remise d'une carte dans un jeu de carte, d'un jeton dans une urne ...

b. Tirages successifs sans remise

On forme maintenant des p-uplets d'éléments de E distincts deux à deux.

★ si E est un sac, former un tel p-uplet revient à piocher p fois dans le sac mais en éliminant au fur et à mesure chaque jeton pioché (pas de remise dans le sac du jeton).

▲ l'application de $[\![1, p]\!]$ dans E associée à un p-uplet d'éléments distincts sera .... ,

en effet ....

....

....

....

Théorème.
Si E un ensemble de cardinal n (non nul).
Lorsque $p \in [\![1; n]\!]$, le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ soit $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Justification.

Exemple : lors d'une course, 8 chevaux prennent le départ. On décide de jouer au tiercé. Combien y-a-t'il de paris possibles ?

Exemples usuels d'utilisation des p-listes d'éléments distincts : tirages successifs sans remise d'une carte dans un jeu de carte, d'un jeton dans une urne …

c. Cas particulier d'un tirage sans remise où l'on pioche tous les éléments : les permutations

Définition.

E est un ensemble fini de cardinal n (non nul).
Une ***permutation*** de E est une n-liste d'éléments distincts de E.

Exemples : voici quelques permutations de l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$:

Situations caractéristiques :

★ Si E est un sac, former une permutation revient à piocher tous les éléments du sac un par un jusqu'à vider le sac, autrement dit il s'agit simplement d'ordonner (ranger) tous les éléments du sac. Pour former une permutation différente, on peut « permuter » deux (ou plus) éléments.

▲ Former une permutation de E revient à construire une application d'un ensemble de cardinal n (par exemple E) dans E, injective … donc bijective.
Une permutation de E peut donc aussi désigner une bijection de E dans E.

Théorème.

Si E est de cardinal n, le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration.

3) Tirages simultanés : les parties

(On rappelle que) si E est un ensemble, une ***partie*** de E est un sous-ensemble de E.

Situation caractéristique :
★ Si E est un sac, former une partie de E à p éléments revient à piocher d'un seul coup p jetons dans le sac, autrement dit à choisir p ***jetons parmi les*** n du sac.
Une partie de E contenant p éléments est parfois aussi appelée une ***combinaison de*** p ***éléments de*** E.
Une combinaison est un ensemble, elle peut donc se noter $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ où les x_i sont des éléments distincts.

Remarques :
- l'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance (contrairement aux listes) : si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, alors $\{1, 3, 4\}$ est une combinaison de 3 éléments de E et $\{\ldots\ldots\}$ représente la même partie.
- $\{1; 1; 4\} = \{1; 4\}$ donc c'est une combinaison de 2 éléments.

Exemple : Si $E = \{a, b, c, d\}$, voici la liste des parties de E :

- partie à 0 éléments : ...
- parties à 1 élément : ...
- parties à 2 éléments : ...
- parties à 3 éléments : ...
- partie à 4 éléments : ...

Théorème.
Le nombre total de parties d'un ensemble E de cardinal n est ....

Démonstration :

Définition.
Le nombre de parties à p éléments de l'ensemble E qui contient n éléments se note $\binom{n}{p}$.
Ce nombre se lit « p parmi n ».
Les nombres $\binom{n}{p}$ s'appellent des ***coefficients binomiaux***.

D'après l'exemple ci-dessus : $\binom{4}{0} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{1} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{2} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{3} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{4} = \ldots\ldots$.

Théorème.
Soit E un ensemble de cardinal n (non nul), et p un entier entre 1 et n ($p \in [\![1; n]\!]$).
Le nombre $\binom{n}{p}$ de parties de p éléments de E est $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$
autrement dit $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 1}}$.

Exemples : $\binom{11}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\binom{75}{2} =$

En particulier : $\boxed{\binom{n}{1} = \ldots}$ en effet ...

$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \ldots}$

$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$

Démonstration du théorème :

Exemple : une grille de loto contient 49 cases. Pour jouer, on doit cocher 6 numéros de la grille. De combien de façons différentes peut-on remplir une grille ?

Exemples usuels d'utilisation des parties en dénombrement : tirages simultanés dans une urne, dans un jeu de cartes, jeux de paris où l'ordre ne compte pas (loto) ...

Théorème.

Pour tout entier n plus grand que 1 et tout k de $[\![1;n]\!]$, on a $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$.

Illustration : 7 personnes veulent monter dans un taxi, qui n'a que 4 places. Combien y a-t-il de façons d'utiliser ce taxi ?
On va compter de deux manières différentes.

Conséquence : pour calculer ces coefficients, on peut donc utiliser le ***triangle de Pascal*** ci-contre : les nombres d'une ligne sont calculés à partir de la ligne précédente.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\dots$	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
$\vdots$								
n				$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k}$			
$n+1$					$\binom{n+1}{k}$			
$\vdots$								

III. Binôme de Newton

Théorème. Formule du binôme de Newton.

Soient a et b deux réels, et n un entier naturel non nul, alors :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

$$= \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$ on peut aussi écrire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

Cette formule justifie le nom de ***coefficients binomiaux***.

Explications sur $(a+b)^5$ **:**

Exemples : Cette formule est une généralisation de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a+b)^3 =$ ....

$(a-b)^3 =$ ....

$(x-2)^4 =$ ....

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k =$ ....

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} =$ ....

Interprétation : ....

Bilan

$\mathrm{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \dots$

$\mathrm{Card}(\llbracket 0, n \rrbracket) = \dots$

$\mathrm{Card}(\llbracket p, n \rrbracket) = \dots$

E est de cardinal n	p-uplets ou p-listes d'éléments de E		parties de E à p éléments
		distincts	
résultats de …			
assimilable à une application …			
exemples avec $p = 3$ et $E = \{a, b, c, d\}$			
combien y en a-t-il de différentes ?			