Comparaison des suites numériques.

La comparaison asymptotique consiste en l'étude de la vitesse de croissance d'une suite en la comparant à une suite plus simple, en général une suite de référence que l'on connaît, par exemple polynôme, inverse, exponentielle, logarithme ... ou des sommes ou produits de telles suites.

Cette comparaison asymptotique se fait suivant des règles précises, et des notations ont été introduites pour faciliter la rédaction, ce sont les notations de Landau : o, O et $\sim$.
(Edmund Landau est un mathématicien allemand, 1877-1938)

I. Relations de comparaison

Définition.

Soient u et v des suites, on suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- La suite (u_n) est ***dominée*** par (v_n) si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
  On note $u_n = O(v_n)$: « u_n est un grand O de (v_n) ».
- La suite (u_n) est ***négligeable*** devant (v_n) lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
  On note $u_n = o(v_n)$: « u_n est un petit o de (v_n) ».
- Les suites (u_n) et (v_n) sont ***équivalentes*** si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.
  On note $u_n \sim v_n$: « (u_n) est équivalente à (v_n) ».

Exemples : les suites ci-dessous sont définies pour $n \geqslant 1$.

- $u_n = n^2 + 3n - 2$ et $v_n = n^2$:

- $u_n = \sin(n)$ et $v_n = n^3$:

- $u_n = 2n + 4$ et $v_n = n$:

Propriété.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \qquad ①$$

$$v_n = o(u_n) \Longrightarrow u_n + v_n \sim u_n \qquad ①'$$

- Avec $\ell \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff u_n \sim \ell$.

Démonstration :

Remarque : si (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, alors c'est la même chose de dire $u_n \sim v_n$ ou $v_n \sim u_n$.

Propriété.

On suppose que $u_n \sim v_n$.
⋆ si (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ ;
⋆ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $-\infty$), alors (v_n) a la même limite
⋆ si (u_n) n'a pas de limite, (v_n) n'en a pas non plus.
En résumé : deux suites équivalentes ont la même limite.

Pour déterminer une limite, on peut d'abord trouver un équivalent avec une suite dont on connaît la limite.

Propriété.

Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

En effet,

II. Comparaisons usuelles

Propriété : puissances, polynômes.

Pour tous réels α et β positifs avec $\alpha < \beta$: $n^\alpha = o(n^\beta)$.
Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Exemples :

- $5n^2 - 3n + 4 \sim$
- $\sqrt{n} = o(n)$.

Théorème des croissances comparées.

Soient α et β des réels strictement positifs, et γ un réel strictement positif.
Alors $(\ln(n))^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ et $n^\beta = o\left(e^{\gamma n}\right)$ et $(\ln(n))^\alpha = o\left(e^{\gamma n}\right)$.

Remarque importante : $e^{\gamma n} = (e^\gamma)^n$ et $e^\gamma > 1$ (car $\gamma > 0$)
donc les deux dernières relations s'écrivent aussi : $\boxed{\text{avec } q > 1 : n^\beta = o\left(q^n\right) \text{ et } (\ln(n))^\alpha = o\left(q^n\right)}$.

Exemples :

Application : donner un équivalent de $e^n + \ln(n)$ et en déduire la limite.

Théorème : équivalents des fonctions usuelles.

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0.
Alors : $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ $\quad \ln(1+u_n) \sim u_n$
$\sin(u_n) \sim u_n$ $\quad \tan(u_n) \sim u_n$ $\quad \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$

Exemples :

- $\sin\left(\frac{3}{n}\right) \sim$
- $e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1 \sim$
- $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim$

III. Manipulation des relations de comparaison

Propriété.

Si $u_n = o(v_n)$, alors pour tous réels α et β non nuls, $\alpha u_n = o(\beta v_n)$. ②
Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout réel α non nul, $\alpha u_n \sim \alpha v_n$.

Exemples :

- $n^2 = o(n^3)$ donc $-5n^2 = o(2n^3)$ (d'après ②)
- $n^3 + 2 \sim n^3$ donc $4n^3 + 8 \sim \ldots.$

Propriété.

Les relations sont ***transitives***.
Autrement dit, avec u, v et w des suites non nulles à partir d'un certain rang :

- si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$;
- si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;
- si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.

Propriété : produit, quotient, puissances d'équivalents.

- $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{cases} \Longrightarrow u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n$ et $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$.
- On suppose $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, et soit α un nombre réel.
  Alors : $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (en particulier $u_n \sim v_n \Longrightarrow \sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$)

Exemples :

- $\dfrac{n^3 - 3n^2 + 11n - 1}{4n^5 - 2n^3 + 3n - 4}$?

On peut retenir (et utiliser) : une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- $\dfrac{(3n-4)(-n^2+2n-2)}{11n+3} \sim$

  donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{(3n-4)(-n^2+2n-2)}{11n+3} =$

- $\dfrac{\ln(n) + n^2}{3n^3 + 3n + 3}$?

Attention : on ne fait pas la « somme » d'équivalents : par exemple, $u_n = n^3 + \frac{1}{n}$ et $v_n = -n^3 + \frac{2n-1}{n^2}$

Si on est bloqué par une somme, on revient à la définition de l'équivalent avec le quotient et on se ramène à une somme de limites..

En revanche :

Propriété : somme de négligeabilité.

$$\begin{cases} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n + v_n = o(w_n) \qquad ③$$

Attention : on ne compose pas des équivalents : $n + 1 \sim n$ pourtant e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n.

En effet,

IV. Exercices classiques

1. Déterminer des équivalents des suites et en déduire leurs limites :
$u_n = \dfrac{n^2+1}{e^n - n}$; $v_n = \dfrac{2^n - 1}{4^n - 3}$; $w_n = \dfrac{(\sqrt{n}+1)^2(\sqrt{n}+3)}{2n\sqrt{n}+5}$; $z_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

2. Déterminer un équivalent de $\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}$.
En déduire un équivalent puis la limite de $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$.