

CONVERGENCE DES SUITES NUMÉRIQUES.

Exercice 1.

- Démontrer que si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
En déduire que si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.
- Justifier que si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge vers 0.

★ Exercice 2.

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2 \cos(n) \cos(1)$.
- En déduire que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 3.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont tous les termes sont non nuls.

Pour chacune des propositions suivantes, la démontrer si elle est juste, et donner un contre exemple sinon.

- Si $(u_n + v_n)$ converge vers 1, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.
- Si (u_n) et (v_n) sont divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.
- Si (u_n) et (v_n) convergent vers 0, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente.
- Si (v_n) converge vers 0 et que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge vers 0.
- Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente aussi.
- Si $(|u_n|)$ est convergente, alors (u_n) est convergente aussi.
- Si $(|u_n|)$ est divergente, alors (u_n) est divergente aussi.

🔍 Exercice 4.

Déterminer les limites des suites ci-dessous :

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| (a) $u_n = n \ln(n)$ | (b) $u_n = \frac{7}{3 - n^5}$ | (c) $u_n = n^{-2} - 3n$ |
| (d) $u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ | (e) $u_n = 3e^{-n}$ | (f) $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - n$ |
| | | (g) $u_n = \frac{3^n - 1}{4^n + 1}$ |

★ Exercice 5.

Soit (u_n) une suite décroissante et minorée.

- Justifier que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne inférieure, que l'on notera ℓ .
- Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 6.

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

La suite est-elle monotone ? convergente ?

Exercice 7.

Soit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

- Montrer que (S_n) est monotone.
- Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
En déduire que (S_n) est majorée.
- Montrer que (S_n) est convergente et donner un majorant de sa limite.

Exercice 8.

On considère la suite u définie par $u_0 = 6$ et pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Étudier les variations de f .
2. (a) À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu avec la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur $[0, 7]$.
(b) Tracer également la droite d'équation $y = x$ et obtenir, par construction, des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_4 .
(c) Peut-on alors émettre une conjecture quant à la convergence de (u_n) ?
3. Étudier les variations de la suite (u_n) (on pourra utiliser une récurrence).
4. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 3.
5. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?

Exercice 9.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{8}(u_n)^2 + \frac{3}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que (u_n) est convergente, et on notera ℓ sa limite.
3. Montrer que ℓ est solution de $\frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$.
4. Résoudre cette équation et déterminer ℓ .

Exercice 10.

Let $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ be the sequence defined by $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Prove that for all natural n greater than or equal to 1, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Determine the monotonicity of (S_n) .
3. Find the limit of the sequence (S_n) .

★ Exercice 11.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes (on supposera (u_n) croissante et (v_n) décroissante). On va chercher à démontrer le théorème du cours qui affirme que ces suites convergent vers la même limite.

1. Montrer que si (v_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend aussi vers $-\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $u_n = (u_n - v_n) + v_n$).
Que peut-on en conclure ?
2. En déduire, à l'aide du théorème de la limite monotone, que (v_n) est convergente.
3. Conclure.

Exercice 12.

On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout $n \geq 0$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n!}$.
Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.