Polynômes

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercise 1.

1. Find the linear function whose slope is 2 and whose graph passes through the point $A(0;3)$.

2. Find the linear function f whose graph passes through the points $A(-2;2)$ et $B(0;1)$.

☞ Exercice 2.

Déterminer la racine et construire le tableau de signe des fonctions suivantes :
$f(x) = 3x - 4$ $\qquad$ $g(x) = -x + 11$ $\qquad$ $h(x) = 3(x-4) - 7(x+1) - 2$

Exercice 3. Étude de la forme canonique.

1. À partir de la représentation graphique de $x \mapsto x^2$, déduire la représentation graphique de :
$f : x \mapsto (x-1)^2 - 4$ $\qquad$ $g : x \mapsto 2(x+3)^2$ $\qquad$ $h : x \mapsto -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$ $\qquad$ $k : x \mapsto 3(x-2)^2 + 1$

2. Sans calcul ni graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans chacun des cas suivants :

(a) $f(x) = 4(x+1)^2 + 7$

(b) $f(x) = -2(x-3)^2 + 1$

(c) $f(x) = (x+3)^2 - 1$

(d) $f(x) = 2(x-5)^2$

Exercice 4. Mise sous forme canonique et factorisation.

On va essayer de mettre le polynôme $3x^2 - 9x - 12$, sous la même forme que celles étudiées dans l'exercice 3., puis le factoriser.

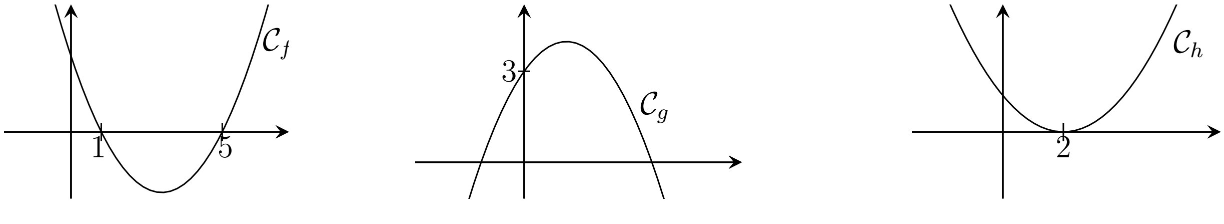
1. Compléter : $\begin{aligned} x^2 - 3x &= x^2 - 2 \times \ldots \times x \\ &= (x - \ldots)^2 - \ldots^2 \end{aligned}$

2. En déduire la forme voulue pour $3x^2 - 9x - 12$.

3. Factoriser par 3 et reconnaître une identité remarquable et l'appliquer.

Exercise 5.

For each of the following graphs, find a quadratic function that could have this graph.



Exercice 6.

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique et en déduire le nombre de racines.
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 2x - 2$ $\qquad$ $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$ $\qquad$ $k(x) = 4x^2 + 16x + 9$

☞ Exercice 7.

Déterminer les racines, réelles ou complexes, des polynômes suivants. Lorsque le polynôme a une ou deux racine(s) réelle(s), donner sa forme factorisée.

1. $P(x) = -3x^2 - x + \frac{1}{2}$

2. $P(x) = 3x^2 - 6x + 15$

3. $P(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

4. $P(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{5}{2}x + \frac{27}{8}$

5. $P(x) = 3x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{3}{4}$

6. $P(x) = \frac{4}{3}x^2 + 3x + \frac{27}{16}$

Exercise 8.

Find two numbers whose sum is $\frac{13}{12}$ and product is $\frac{1}{4}$.

★ Exercice 9.

1. Démontrer que pour tous les réels a et b, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

2. Démontrer que pour tous les réels a, b et c, $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

★ Exercice 10.

On veut résoudre, suivant les valeurs du paramètre réel m, l'équation :

$$(E_m) \qquad x^2 + (m+2)x + 9 = 0$$

1. Résoudre l'équation dans chacun des cas suivants :

(a) si $m = 0$ **(b)** si $m = 4$ **(c)** si $m = 5$

2. On revient au cas général où m est quelconque.

(a) Calculer le discriminant Δ_m de l'équation (E_m).

(b) Étudier le signe de Δ_m en fonction de m.

(c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E_m) suivant les valeurs du paramètre m.

Exercice 11.

Effectuer la division euclidienne de $2x^3 - x^2 + 4x + 7$ par $x + 1$, puis de $2x^3 - x^2 + 10x - 5$ par $x^2 + 5$. Et (éventuellement) de $2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 20x^2 + 23x - 4$ par $x^2 - 3x + 4$.

☞ Exercice 12.

1. Soit $P(x) = x^3 - \dfrac{7}{3}x^2 - 2x$. Factoriser au maximum ce polynôme, et préciser ses racines.

2. On définit $Q(x) = -2x^3 - 4x^2 + 22x + 24$.
Déterminer une racine évidente de $Q(x)$, puis factoriser ce polynôme le plus possible.

3. Soit $S(x) = -x^3 + 9x^2 + x - 105$.
Calculer $S(-3)$ puis résoudre l'équation $S(x) = 0$. Factoriser S au maximum.

Exercice 13.

Factoriser dans $\mathbb{R}$ (le plus efficacement possible) les expressions suivantes :

$f(x) = 4x^2 - 7x$
$g(x) = x(3x+4) - x(-2x+5)$
$h(x) = -x^2 - 3x + 4$
$i(x) = 2x^3 - \dfrac{16}{3}x^2 - 2x$
$j(x) = (x-3)x^2 + x - 3$

$k(x) = 4x^2 - 4x + 1$
$\ell(x) = 3x^3 - 10x^2 + \dfrac{28}{3}x - \dfrac{8}{3}$
$m(x) = x(2x-1) + (2x-1)(3x^2 - 7)$
$n(x) = 7x^2 - 14x - 21$
$p(x) = 4x^2 - 9$