POLYNÔMES.

Les polynômes sont les fonctions de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Par exemple : ....

Mais .... ne sont pas des polynômes.

Nous nous restreindrons dans ce chapitre aux :
- polynômes de degré 1 : $x \mapsto mx + p$ avec m et p des nombres réels ;
- polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels ;
- polynômes de degré 3 : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des nombres réels.

Exemples :

- $f : x \mapsto -2x + 8$ est un polynôme de degré 1

  $f(4) =$ .... : on dit que $\boxed{4 \textbf{\textit{ est une racine de }} f}$.

- $g : x \mapsto 3x^2 - 9x - 12$ est un polynôme de degré 2

$g(0) = \ldots$	$g(-1) = \ldots$	$g(4) = \ldots$
$= \ldots$	$= \ldots$	$= \ldots$
	$=$	$=$

....

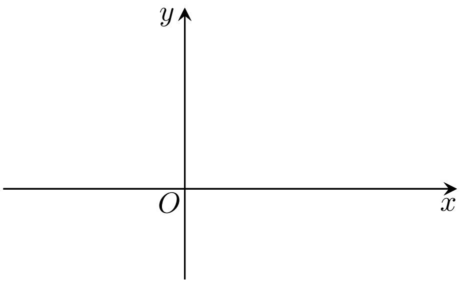
I. Polynômes de degré 1 : fonctions affines $x \mapsto mx + p$

m est ....

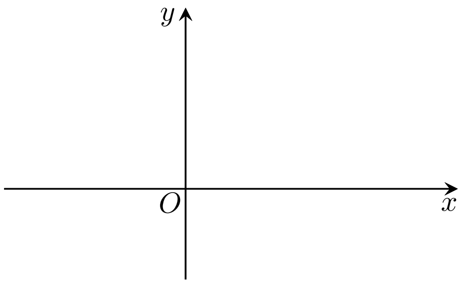
1) Représentation graphique et signe

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$:

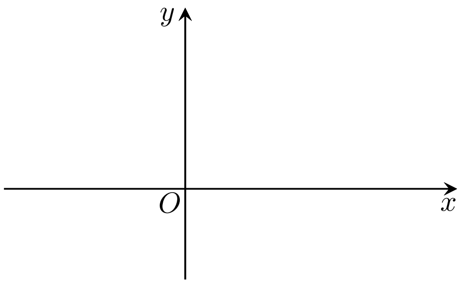
$\underline{m > 0}$



$\underline{m < 0}$



$\underline{m = 0 \text{ : fonction constante}}$



Conclusion : ⋆ lorsque $\underline{m > 0}$, la fonction est strictement ...., le signe est « $- \; 0 \; +$ ».
⋆ lorsque $\underline{m < 0}$, la fonction est strictement ...., le signe est « $+ \; 0 \; -$ ».
⋆ lorsque $\underline{m = 0}$, la fonction affine est ...., elle est de signe constant.

Rappels : si la courbe d'une fonction affine f passe par $A(x_A, y_A)$ et par $B(x_B, y_B)$, alors $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$;
puis pour trouver p, on utilise la relation $f(x_A) = y_A$ avec $f(x) = mx + p$ (en ayant remplacé le m par sa valeur).

Exemples : $f(x) = 3 - 2x$

$g(x) = -(2x - 3) + 7x - 11$

2) Racine

Une fonction constante non nulle n'a pas de racine.
Si $m \neq 0$: on note $f(x) = mx + p$, le polynôme a-t-il une ou plusieurs racines ?

Donc f a une seule racine : .

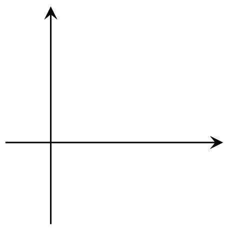
II. Polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

1) Représentation graphique et signe

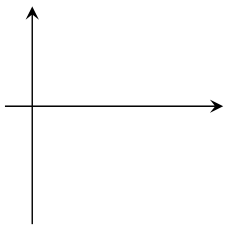
Propriété.

La courbe représentative d'un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.
Son sommet est en $x = -\frac{b}{2a}$.
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut : « $\cup$ ».
Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas « $\cap$ ».

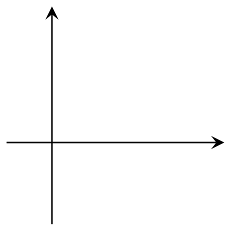
Voici tous les cas possibles de courbe (concernant le nombre de racines réelles, le signe, les variations) :
avec $a > 0$:



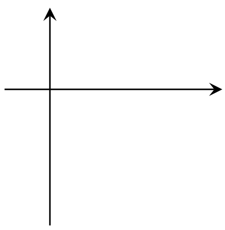
ou



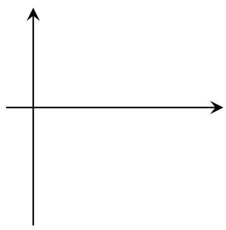
ou cas limite :



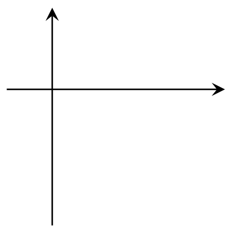
avec $a < 0$:



ou



ou cas limite :



Conclusion : un polynôme du second degré a zéro, une ou deux racines.

$\star$ si le polynôme a 0 ou 1 racine, il est de signe constant : celui de a ;
$\star$ si le polynôme a 2 racines : si $a < 0$, les signes sont « $-0+0-$ »
si $a > 0$, les signes sont « $+0-0+$ »
autrement dit : signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé entre les racines.

2) Forme canonique et factorisation

Théorème : forme canonique.

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ et cette écriture est appelée ***forme canonique*** du polynôme.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$, ce nombre est appelé ***discriminant*** du polynôme, et alors on peut écrire $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

Remarque : on ne retiendra pas par cœur l'expression de la forme canonique, mais il faut savoir la retrouver sur des exemples.

Méthode :

1. factoriser les termes en x^2 et x par a ;
2. faire apparaître le début d'une identité remarquable de type $(x-?)^2 = x^2 - 2\times ?\times x + ?^2$ et compenser avec $-?^2$;
3. factoriser cette identité remarquable et arranger les termes restant.

Exemple : $g(x) = -2x^2 + 6x - 7$

$=$

$=$

$=$

$=$

Théorème : racines d'un polynôme de degré 2.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines réelles, notées x_1 et x_2, que l'on détermine avec les formules $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme a une unique racine réelle, elle vaut $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes conjuguées, données par les formules $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$.

Méthode : pour déterminer les racines éventuelles d'un polynôme du second degré, on commence par identifier les coefficients a, b et c, puis on calcule Δ. Selon sa valeur on calcule sa ou ses racines.

Exemples : déterminer les racines réelles ou complexes des polynômes suivants :

$f(x) = -4x^2 - 2x + 6$	$g(x) = x^2 - 2x + 5$	$h(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Théorème : factorisation.

f est un polynôme du second degré :

⋆ si f a deux racines distinctes x_1 et x_2, alors $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$.

⋆ si f a une unique racine x_1, alors $\boxed{f(x) = a(x-x_1)^2}$.

Suite des exemples : $f(x) = \dots$

3) Relations entre coefficients et racines

Développons l'expression $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$f(x) =$

$=$

$=$

On obtient ainsi : $\boxed{b = -a(x_1 + x_2) \text{ et } c = ax_1x_2}$.

Exemples d'utilisation :

1. ***Trouver la deuxième racine si l'on en connaît une*** : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
   On peut « deviner » que 1 est racine : $f(1) = 3 + 9 - 12 = 0$.
   La deuxième racine x_2 vérifie : $-12 = 3 \times 1 \times x_2$ donc $x_2 = \ldots$.
2. ***Trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.***
   Cherchons deux nombres x_1 et x_2 dont la somme fait $\frac{7}{2}$ et le produit -15.
   Ils sont racines du polynôme $x^2 - \frac{7}{2}x - 15$:
   $\Delta = \ldots$

Méthode : pour trouver deux nombres dont on connaît la somme s et le produit p, on détermine les racines du polynôme $x^2 - sx + p$: ce sont les nombres cherchés.

III. Polynômes de degré 3

Pour des polynômes de degré 3 (ou plus), il n'existe pas de formules analogues au Δ, x_1, x_2, on ne peut donc pas factoriser facilement. Le but de cette partie est de voir deux méthodes pour pouvoir factoriser quand même des polynômes de degré trois, à condition de connaître une racine.

Lorsque l'on ne connaît pas de racine, on peut essayer d'en trouver une « évidente » parmi 0, 1, -1, 2, -2 ... (on calcule les images de ces valeurs).

Propriété.

Si x_1 est racine d'un polynôme P, alors P est factorisable par $(x - x_1)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.
Le degré de Q est un de moins que le degré de P.

Reste à déterminer les coefficients de Q.

1) Première méthode : par identification des coefficients

Exemple : $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 34x + 30$. P est un polynôme de degré 3, on va chercher toutes ses racines et le factoriser.
$P(1) =$

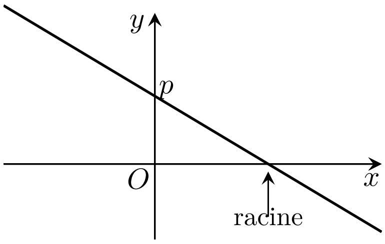
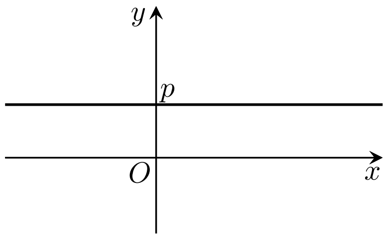
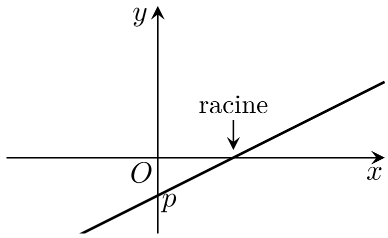
2) Deuxième méthode : par division euclidienne

Cette méthode est basée sur le même principe que la division des nombres entiers.

Remarque : ces deux méthodes s'appliquent aussi à des polynômes de degré 2 dont on connaît une racine.

BILAN

Degré 1

$m<0$	$m=0$	$m>0$
		

x	$-\frac{p}{m}$
$mx+p$	$+$ 0 $-$

x	
$mx+p$	signe de p

x	$-\frac{p}{m}$
$mx+p$	$-$ 0 $+$

Degré 2

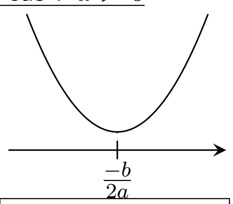
On note Δ le ***discriminant*** : $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Racines de P	les racines sont complexes $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	une seule racine : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$	deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $P(x)$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$ $\star$	$P(x) = a\,(x-x_1)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Signe de $P(x)$

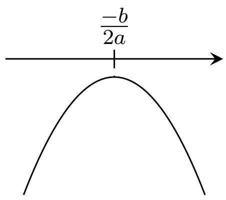
$\Delta<0$

1er cas : $a>0$



x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	$+$

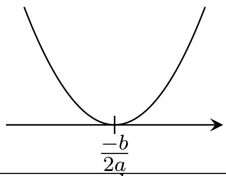
2ème cas : $a<0$



x	$-\infty$ $+\infty$
$P(x)$	$-$

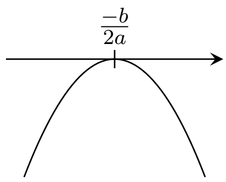
$\Delta=0$

1er cas : $a>0$



x	$\frac{-b}{2a}$
$P(x)$	$+$ 0 $+$

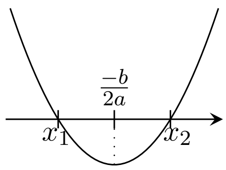
2ème cas : $a<0$



x	$\frac{-b}{2a}$
$P(x)$	$-$ 0 $-$

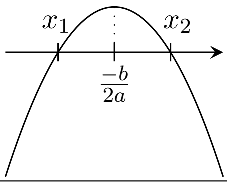
$\Delta>0$

1er cas : $a>0$



x	x_1 x_2
$P(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

2ème cas : $a<0$



x	x_1 x_2
$P(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

$\star$ on peut toujours factoriser avec les racines complexes : $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mais cela n'est souvent pas utile, par exemple pour l'étude de signe.