Polynômes.

Les polynômes sont les fonctions de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Par exemple : ....

Mais .... ne sont pas des polynômes.

Nous nous restreindrons dans ce chapitre aux :
- polynômes de degré 1 : $x \mapsto mx + p$ avec m et p des nombres réels ;
- polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels ;
- polynômes de degré 3 : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d des nombres réels.

Exemples :
- $f : x \mapsto -2x + 8$ est un polynôme de degré 1

  $f(4) =$ .... : on dit que $\boxed{4 \textbf{\textit{ est une racine de }} f}$.

- $g : x \mapsto 3x^2 - 9x - 12$ est un polynôme de degré 2

$g(0) = \ldots$	$g(-1) = \ldots$	$g(4) = \ldots$
$= \ldots$	$= \ldots$	$= \ldots$
	$=$	$=$

....

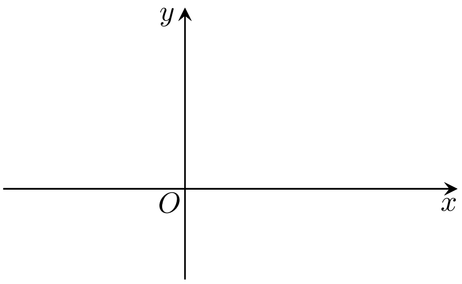
I. Polynômes de degré 1 : fonctions affines $x \mapsto mx + p$

m est ....

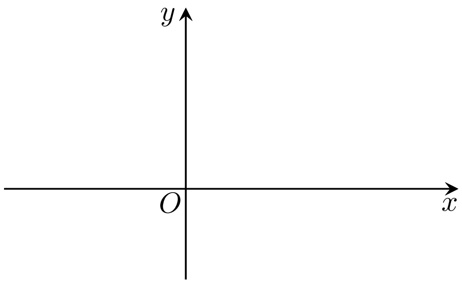
1) Représentation graphique et signe

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$:

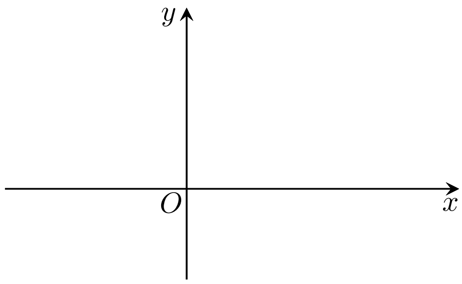
$\underline{m > 0}$



$\underline{m < 0}$



$\underline{m = 0 \text{ : fonction constante}}$



Conclusion : ⋆ lorsque $\underline{m > 0}$, la fonction est strictement ...., le signe est « $-$ 0 $+$ ».
⋆ lorsque $\underline{m < 0}$, la fonction est strictement ...., le signe est « $+$ 0 $-$ ».
⋆ lorsque $\underline{m = 0}$, la fonction affine est ...., elle est de signe constant.

Rappels : si la courbe d'une fonction affine f passe par $A(x_A, y_A)$ et par $B(x_B, y_B)$, alors $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$;
puis pour trouver p, on utilise la relation $f(x_A) = y_A$ avec $f(x) = mx + p$ (en ayant remplacé le m par sa valeur).

Exemple : $f(x) = 3 - 2x$

2) Racine

Une fonction constante non nulle n'a pas de racine.
Si $m \neq 0$: on note $f(x) = mx + p$, le polynôme a-t-il une ou plusieurs racines ?

Donc f a une seule racine : .

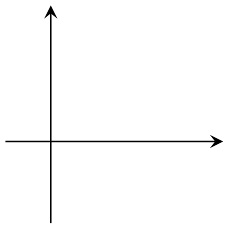
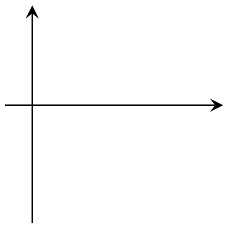
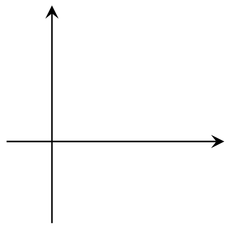
II. Polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

1) Représentation graphique et signe

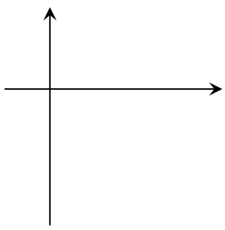
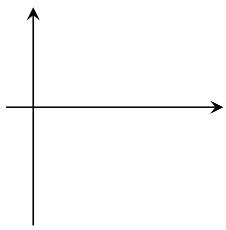
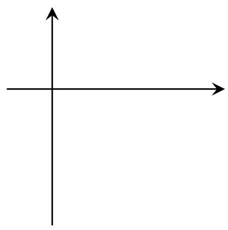
Propriété.

La courbe représentative d'un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.
Son sommet est en $x = -\frac{b}{2a}$.
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut : « $\cup$ ».
Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas « $\cap$ ».

Voici tous les cas possibles de courbe (concernant le nombre de racines réelles, le signe, les variations) :
avec $a > 0$:

 ou  ou cas limite : 

avec $a < 0$:

 ou  ou cas limite : 

Conclusion : un polynôme du second degré a zéro, une ou deux racines.

- $\star$ si le polynôme a 0 ou 1 racine, il est de signe constant : celui de a ;
- $\star$ si le polynôme a 2 racines : si $a < 0$, les signes sont « $-0+0-$ »
  si $a > 0$, les signes sont « $+0-0+$ »

autrement dit : signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé entre les racines.

2) Forme canonique et factorisation

Théorème et définitions : différentes formes d'un polynôme.

Soit f un polynôme donné sous sa ***forme développée*** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- ***forme canonique*** : il existe deux réels α et β tels que $\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$: le point (α, β) est le sommet de la parabole.
- ***forme factorisée*** :
  - $\star$ si f a deux racines distinctes x_1 et x_2, alors $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$.
  - $\star$ si f a une unique racine x_1, alors $\boxed{f(x) = a(x-x_1)^2}$.
  - $\star$ si les racines de f sont complexes non réelles, il n'y a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

a. Forme canonique

La formule générale est complexe, on retiendra la méthode pour y arriver.

Méthode :

1. factoriser les termes en x^2 et x par a ;
2. faire apparaître le début d'une identité remarquable de type $(x - \dots)^2 = x^2 - 2 \times \dots \times x + \dots^2$ et compenser avec $- \dots^2$;
3. factoriser cette identité remarquable et arranger les termes restant.

Exemple : $g(x) = -2x^2 + 6x - 5$

$=$

$=$

$=$

$=$

$=$

On peut en déduire l'allure de la courbe :

b. Forme factorisée et racines

Théorème : racines d'un polynôme de degré 2.

Pour un polynôme $ax^2 + bx + c$, on note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$. Ce nombre s'appelle le ***discriminant***.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines réelles, notées x_1 et x_2, que l'on détermine avec les formules $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme a une unique racine réelle, elle vaut $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes conjuguées, données par les formules $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$.

Méthode : pour déterminer les racines éventuelles d'un polynôme du second degré, on commence par identifier les coefficients a, b et c, puis on calcule Δ. Selon sa valeur on calcule sa ou ses racines.

Exemples : déterminer les racines réelles ou complexes des polynômes suivants, et donner la forme factorisée dans $\mathbb{R}$:

$f(x) = -4x^2 - 2x + 6$

$g(x) = x^2 - 2x + 5$

$h(x) = 2x^2 - 4x + 2$

3) Relations entre coefficients et racines

Développons l'expression $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$f(x) =$

$=$

$=$

On obtient ainsi : $\boxed{b = -a(x_1 + x_2) \text{ et } c = ax_1x_2}$.

Exemples d'utilisation :

1. ***Trouver la deuxième racine si l'on en connaît une*** : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
   On peut « deviner » que 1 est racine : $f(1) = 3 + 9 - 12 = 0$.
   La deuxième racine x_2 vérifie : $-12 = 3 \times 1 \times x_2$ donc $x_2 = \ldots$.
2. ***Trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.***
   Cherchons deux nombres x_1 et x_2 dont la somme fait $\frac{7}{2}$ et le produit -15.
   Ils sont racines du polynôme $x^2 - \frac{7}{2}x - 15$:
   $\Delta = \ldots$

Méthode : pour trouver deux nombres dont on connaît la somme s et le produit p, on détermine les racines du polynôme $x^2 - sx + p$: ce sont les nombres cherchés.

III. Polynômes de degré 3

Pour des polynômes de degré 3 (ou plus), il n'existe pas de formules analogues au Δ, x_1, x_2, on ne peut donc pas factoriser facilement. Le but de cette partie est de voir deux méthodes pour pouvoir factoriser quand même des polynômes de degré trois, à condition de connaître une racine.

Lorsque l'on ne connaît pas de racine, on peut essayer d'en trouver une « évidente » parmi 0, 1, -1, 2, -2 ... (on calcule les images de ces valeurs).

Propriété.

Si x_1 est racine d'un polynôme P, alors P est factorisable par $(x - x_1)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.
Le degré de Q est un de moins que le degré de P.

Reste à déterminer les coefficients de Q.

1) Première méthode : par identification des coefficients

Exemple : $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 34x + 30$. P est un polynôme de degré 3, on va chercher toutes ses racines et le factoriser.
$P(1) =$

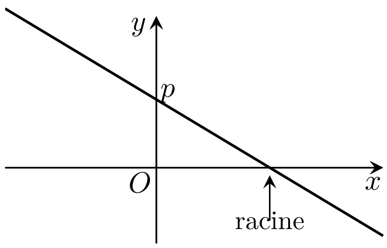
2) Deuxième méthode : par division euclidienne

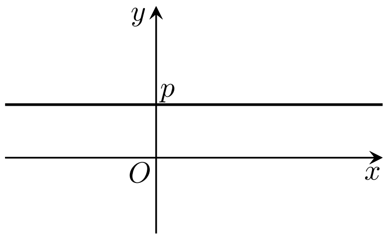
Cette méthode est basée sur le même principe que la division des nombres entiers.

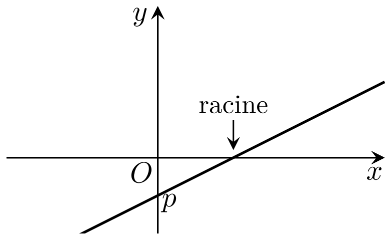
Remarque : ces deux méthodes s'appliquent aussi à des polynômes de degré 2 dont on connaît une racine.

BILAN

Degré 1

<table>
<tr><th>$m<0$</th><th>$m=0$</th><th>$m>0$</th></tr>
<tr>
<td>

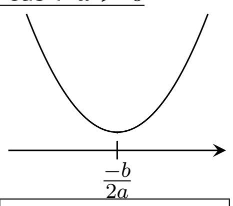
$\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\frac{p}{m} \\ \hline mx+p & + \quad 0 \quad - \\ \hline\end{array}$</td>
<td>

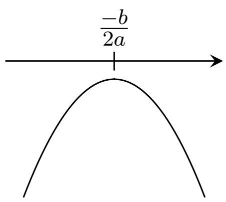
$\begin{array}{|c|c|}\hline x & \\ \hline mx+p & \text{signe de } p \\ \hline\end{array}$</td>
<td>

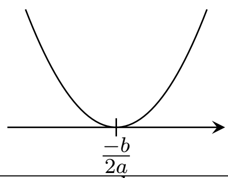
$\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\frac{p}{m} \\ \hline mx+p & - \quad 0 \quad + \\ \hline\end{array}$</td>
</tr>
</table>

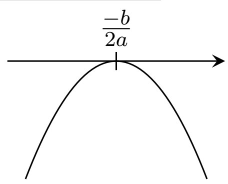
Degré 2

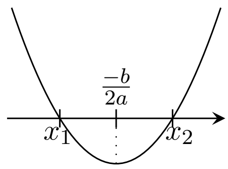
On note Δ le ***discriminant*** : $\Delta = b^2 - 4ac$.

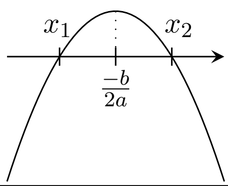
<table>
<tr><th></th><th>$\Delta<0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta>0$</th></tr>
<tr>
<td>Racines de P</td>
<td>les racines sont complexes
$x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$</td>
<td>une seule racine :
$x_1 = -\dfrac{b}{2a}$</td>
<td>deux racines distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Factorisation de $P(x)$</td>
<td>pas de factorisation dans $\mathbb{R}$ $\star$</td>
<td>$P(x) = a\,(x-x_1)^2$</td>
<td>$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Signe de $P(x)$</td>
<td><u>1er cas : $a>0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\infty \qquad +\infty \\ \hline P(x) & + \\ \hline\end{array}$
<u>2ème cas : $a<0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & -\infty \qquad +\infty \\ \hline P(x) & - \\ \hline\end{array}$</td>
<td><u>1er cas : $a>0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & \frac{-b}{2a} \\ \hline P(x) & + \quad 0 \quad + \\ \hline\end{array}$
<u>2ème cas : $a<0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & \frac{-b}{2a} \\ \hline P(x) & - \quad 0 \quad - \\ \hline\end{array}$</td>
<td><u>1er cas : $a>0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & x_1 \qquad x_2 \\ \hline P(x) & + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \\ \hline\end{array}$
<u>2ème cas : $a<0$</u>


$\begin{array}{|c|c|}\hline x & x_1 \qquad x_2 \\ \hline P(x) & - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \\ \hline\end{array}$</td>
</tr>
</table>

$\star$ on peut toujours factoriser avec les racines complexes : $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ mais cela n'est souvent pas utile, par exemple pour l'étude de signe.