Opérations sur les vecteurs.

Exercice 1.

Soit ABC un triangle non aplati.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 2.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points $A(1;2)$, $B(2;3)$ et $C(3;0)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Que vaut l'aire de $ABCD$? Que vaut l'aire du triangle ABC ?

Exercice 3.

Dans le plan muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on définit trois vecteurs :
$\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\imath} - \frac{4}{5}\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

1. Vérifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée.

2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette base.

Exercice 4.

Dans une base orthonormée directe, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthogonale directe de l'espace.

3. Comment transformer cette base pour obtenir une base orthonormale directe ?

Exercice 5.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1;2)$, $B(3;4)$ et $C(4;0)$.

1. Déterminer des valeurs approchées des angles du triangle ABC.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 6.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$.
Calculer :

(a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

(b) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

(c) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$

(d) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$

(e) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$

(f) $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$

Exercice 7.

Déterminer le réel μ tel que les trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\\mu\end{pmatrix}$ soient coplanaires.

Exercice 8.

Soient $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs, et $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{k})\overrightarrow{\jmath} - (\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{\jmath})\overrightarrow{k}$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\imath}$ sont orthogonaux.

Exercice 9.

Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs de l'espace.
Montrer que $\left[\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{d}\right]=0$.

* Exercice 10.

Une molécule de méthane (CH_4) est constituée par quatre atomes d'hydrogènes qui sont les sommets A, B, C et D d'un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que $AB = AC = AD = BC = CD = DB$, on prendra comme unité de longueur cette arête commune) et d'un atome de carbone situé au point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ et en déduire que deux arêtes non sécantes de $ABCD$ sont orthogonales.

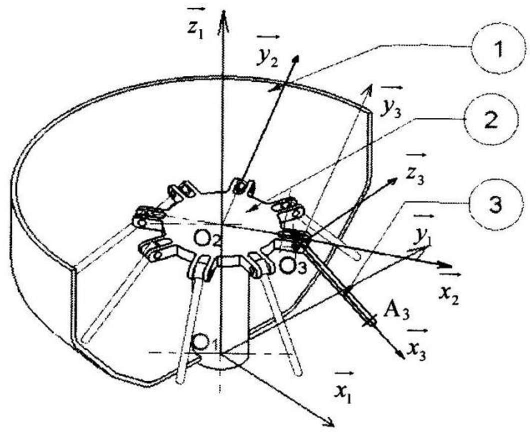
2. **(a)** Démontrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

(b) En déduire que $AG=\sqrt{\frac{3}{8}}$.

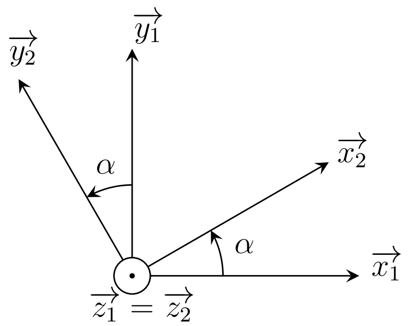
(c) Que peut-on dire de BG, CG et DG ?

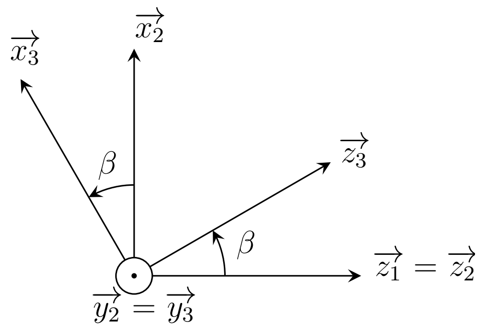
3. Démontrer que $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{8}$ et en déduire que $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)\approx 109°$.

Exercice 11.



Une centrifugeuse de laboratoire est constituée d'un carter 1 en forme de bol, d'un rotor 2 auquel sont fixées des éprouvettes 3.
Les éprouvettes contiennent chacune deux liquides de masse volumique différente. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du rotor 2, les éprouvettes 3 s'inclinent et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond des éprouvettes, ce qui réalise la séparation des deux liquides.
Le repère $\mathcal{R}_1(0_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ est associé au carter 1.
Le rotor 2 a un mouvement de rotation d'axe $(O_1,\overrightarrow{z_1})$ par rapport au carter 1.
On définit le repère $\mathcal{R}_2(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ associé au rotor 2, $\alpha=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})$ et $\overrightarrow{O_1O_2}=h\overrightarrow{z_1}$.
L'éprouvette 3 a un mouvement de rotation d'axe $(O_3,\overrightarrow{y_3})$ par rapport au rotor 2.
On définit le repère $\mathcal{R}_3(O_3,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$ associé à l'éprouvette 3, $\beta=(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3})$, $\overrightarrow{O_2O_3}=R.\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{O_3A_3}=\ell\overrightarrow{x_3}$.
Ci-dessous les figures planes illustrant les 2 paramètres d'orientation α et β.





Déterminer les produits vectoriels suivants :
$\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{y_2}$; $\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{z_3}\wedge\overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_3}$ et $\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{z_3}$.