Opérations sur les vecteurs.

I. Produit scalaire

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, du plan ou de l'espace.
On note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le ***produit scalaire*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls;} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

Remarque : par analogie au produit numérique, on note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, et on a aussi $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace :
⋆ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est aigü, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est obtus.
⋆ $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
⋆ $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ soit $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit scalaire est

⋆ symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ,

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \text{ et } \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \quad \text{(linéarité à droite)}$$

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \text{ et } (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \quad \text{(linéarité à gauche)}$$

En particulier : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Remarque : on peut déduire les « identités remarquables » suivantes :
$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 =$ $\qquad$ $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) =$

3) Expression du produit scalaire avec les coordonnées

Théorème.

⋆ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$.

⋆ Dans l'espace, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$.

(Le résultat ne dépend pas de la base choisie, mais elle doit être orthonormale.)

Exemple : déterminer le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$, en déduire l'angle non orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Méthode : pour déterminer l'angle non-orienté θ entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées, on peut calculer le produit scalaire, puis utiliser la formule $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}}$.

II. Déterminant dans le plan

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan orienté.
On note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ le ***déterminant*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ défini par :
$$\begin{cases} [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls ;} \\ [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.

Remarque : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \pm\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est
$\star$ anti-symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$.
$\star$ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et tout réel λ,

.... (linéarité à droite)

....(linéarité à gauche)

Exemple : $[(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}); (-\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v})] = \dots$

$= \dots$

$= \dots$

$= \dots$

$= \dots [\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}]$

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

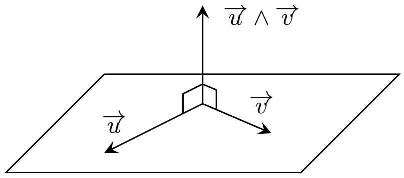
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.
Alors $\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = xy' - yx'}$ (ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$).

Exemple : calculer produit scalaire et déterminant de $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et en déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Méthode : on peut déterminer l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées : on calcule le produit scalaire, qui donne l'angle au signe près, et le signe est donné par le signe du déterminant.

III. Produit vectoriel dans l'espace

Le produit vectoriel dans l'espace est une opération entre deux vecteurs qui a pour résultat un autre vecteur.



Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le ***produit vectoriel*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le vecteur défini ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ ne sont pas colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \text{ est le vecteur} \\ \qquad \text{de norme } \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \\ \qquad \text{orthogonal à } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \\ \qquad \text{de sens tel que } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \text{ soit une base directe.} \end{cases}$$

1) Interprétations géométriques

Conséquences de la définition : $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$.
Et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

Remarques :

⋆ $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ représente ...

⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe.

⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est ...

⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, alors ...

⋆ si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe, $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \ldots$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \ldots$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \ldots$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit vectoriel est

⋆ .... : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \ldots$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et tout réel λ,

.... (linéarité à droite)

....(linéarité à gauche)

Exemple : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe, on pose : $\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$.
Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} =$

3) Expression du produit vectoriel avec les coordonnées

Théorème : expression du produit vectoriel avec les coordonnées.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, autrement dit $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Exemple et méthode(s) : dans une base orthonormée, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

IV. Déterminant dans l'espace ou produit mixte

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le ***produit mixte*** (ou ***déterminant***) des trois vecteurs, c'est le nombre défini par $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

En effet,

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit mixte est

$\star$ antisymétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$,

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$$

$\star$ trilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{x}$, et tout réel λ,

$$\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}\right] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}] \quad \text{et} \quad [\lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$$

....

....

3) Expression du produit mixte avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$. Ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Méthode pratique de calcul : règle de Sarrus.

Comptés positivement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{array}\right.$. Comptés négativement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{array}\right.$.

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?