Opérations sur les vecteurs.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**

☞ Exercice 1.

Dans le plan muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on définit trois vecteurs :
$\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\imath} - \frac{4}{5}\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

1. Vérifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée.

2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette base.

Exercice 2.

Soit ABC un triangle non aplati.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 3.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(4; 0)$.

1. Déterminer des valeurs approchées des angles du triangle ABC.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 4$. Calculer :

1. $(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}).(-2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$ **2.** $(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\vec{u} + 3\overrightarrow{v})$ **3.** $\det(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}, 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Exercice 5.

Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$.

Exercice 6.

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère les points $A(1, \sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} + 2)$.

1. Calculer une mesure de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.

2. Calculer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Exercice 7.

1. $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est une base orthonormée directe du plan.
On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, justifier que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est aussi une base orthonormée directe.

2. On donne $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

☞ Exercice 8.

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Exercice 9.

Dans une base orthonormée directe, on définit : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v}$.

1. Déterminer le cosinus et le sinus de l'angle non orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

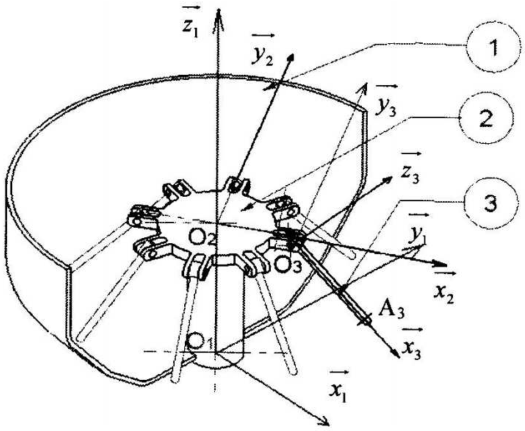
2. Justifier que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, puis calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.

Exercise 10.

Consider three vectors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$ and $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\\mu\end{pmatrix}$.

Determine the parameter μ so that these vectors are coplanar.

Exercice 11.



Une centrifugeuse de laboratoire est constituée d'un carter 1 en forme de bol, d'un rotor 2 auquel sont fixées des éprouvettes 3.

Les éprouvettes contiennent chacune deux liquides de masse volumique différente. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du rotor 2, les éprouvettes 3 s'inclinent et le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté vers le fond des éprouvettes, ce qui réalise la séparation des deux liquides.

Le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est associé au carter 1.

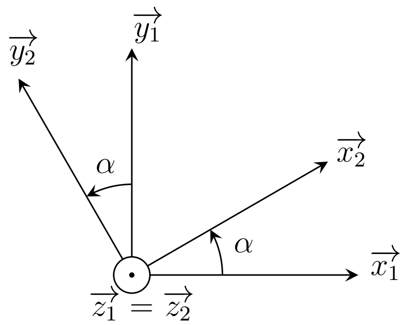
Le rotor 2 a un mouvement de rotation d'axe $(O_1, \overrightarrow{z_1})$ par rapport au carter 1.

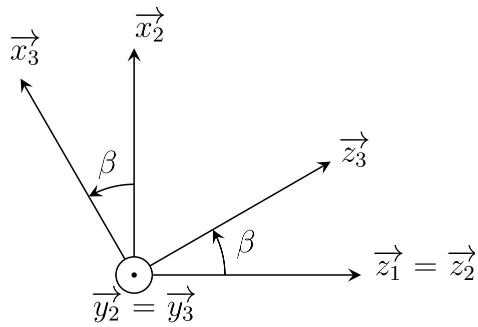
On définit le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ associé au rotor 2, et $\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ et $\overrightarrow{O_1O_2} = h\overrightarrow{z_1}$.

L'éprouvette 3 a un mouvement de rotation d'axe $(O_3, \overrightarrow{y_3})$ par rapport au rotor 2.

On définit le repère $\mathcal{R}_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ associé à l'éprouvette 3, avec $\beta = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$, $\overrightarrow{O_2O_3} = R\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{O_3A_3} = \ell\overrightarrow{x_3}$.

Ci-dessous les figures planes illustrant les 2 paramètres d'orientation α et β.





Déterminer les produits vectoriels suivants :

$\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$; $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_3} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_1}$; $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_3}$ et $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_3}$.