Opérations sur les vecteurs.

I. Produit scalaire

Définition.

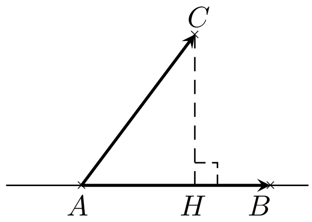
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, du plan ou de l'espace.
On note $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le ***produit scalaire*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls ;} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

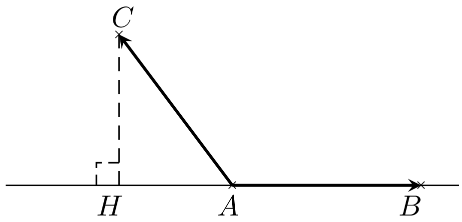
Remarque : par analogie au produit numérique, on note $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, et on a aussi $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

1) Interprétations géométriques

A, B et C sont trois points distincts, on construit H le projeté orthogonal de C sur (AB) :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

En particulier, si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur unitaire (de norme 1), alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \pm AH$, on peut donc voir un lien entre le produit scalaire et la projection orthogonale.

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan ou de l'espace :
- ⋆ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} > 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est aigü, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} < 0$ si l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est obtus.
- ⋆ $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
- ⋆ $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ soit $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}}$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit scalaire est
- ⋆ symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- ⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ,

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \text{ et } \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \quad \text{(linéarité à droite)}$$
$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \text{ et } (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \quad \text{(linéarité à gauche)}$$

En particulier : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Remarque : on peut déduire les « identités remarquables » suivantes :

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 =$

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) =$

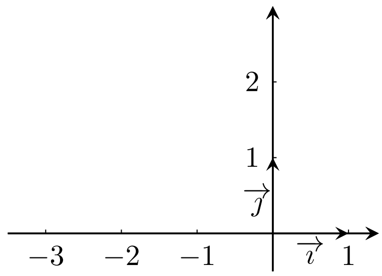
3) Produit scalaire et coordonnées

Théorème.

- $\star$ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
  Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$.
- $\star$ Dans l'espace, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.
  Alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$.

(Le résultat ne dépend pas de la base choisie, mais elle doit être orthonormale.)

Exemple : dans une base orthonormée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\jmath}$.



Propriété.

Dans une base <u>orthonormée</u> du plan $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\imath})\overrightarrow{\imath} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\jmath})\overrightarrow{\jmath}}$.

Dans une base <u>orthonormée</u> de l'espace $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$: $\boxed{\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\imath})\overrightarrow{\imath} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\jmath})\overrightarrow{\jmath} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{k})\overrightarrow{k}}$.

En effet, en notant (x, y) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on a $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$.

Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\imath} =$

$=$

$=$

4) Utilisations du produit scalaire

a. déterminer une orthogonalité de vecteurs ou perpendicularité de droites dans le plan

Exemple : dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on donne $A(-1, -2)$, $B(5, 0)$, $C(3, -1)$ et $D(2, 2)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? et (AD) et (BD) ?

Méthode :

- $\star$ pour savoir si deux vecteurs sont orthogonaux, on calcule le produit scalaire : il est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux ;
- $\star$ pour étudier la perpendicularité de droites dans le plan : (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

b. calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Exemple : dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Vérifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée, et déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette nouvelle base.

Méthode : pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, calculer les produits scalaires du vecteur avec chacun des vecteurs de la base, et utiliser la formule : $\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{i})\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{j})\overrightarrow{j} + (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{k})\overrightarrow{k}$.

c. déterminer un angle non orienté

Exemple : déterminer le produit scalaire de $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$, en déduire l'angle non orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Méthodes :

- $\star$ pour déterminer l'angle non-orienté entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées, on peut calculer leurs normes, et le produit scalaire, puis utiliser la formule $\boxed{\cos((\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}}$.
- $\star$ pour déterminer l'angle $\widehat{BAC}$, on trouve son cosinus avec : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.

II. Déterminant dans le plan

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan orienté.
On note $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le ***déterminant*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ défini par :

$$\begin{cases} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont non nuls ;} \\ \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ ou } \overrightarrow{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi noter $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan :

⋆ $-\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \leqslant \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

⋆ $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pm\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est

⋆ anti-symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et tout réel λ,

.... (linéarité à droite)

....(linéarité à gauche)

Exemple :

$$\begin{aligned}\det\big((2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}), (-\overrightarrow{u} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{v})\big) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\end{aligned}$$

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $\boxed{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx'}$ (ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$).

Exemple : on se place dans une base orthonormée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, et on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

4) Utilisations du déterminant dans le plan

a. déterminer une colinéarité, un parallélisme, un alignement de points

Exemple : dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on note $A(-2,-2)$, $B(1,-1)$ et $C(3,-\frac{1}{3})$, montrer que A, B et C sont alignés.

Méthode :

- $\star$ pour savoir si deux vecteurs du plan sont colinéaires, on calcule leur déterminant : les vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- $\star$ A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) ;
- $\star$ (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires).

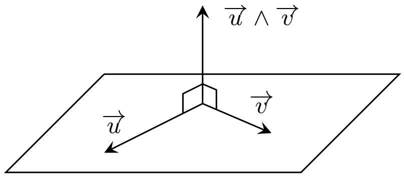
b. déterminer un angle orienté

Exemple : calculer produit scalaire et déterminant de $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et en déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Méthode :

- $\star$ on peut déterminer l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées : on calcule le produit scalaire, qui donne l'angle au signe près, et le signe est donné par le signe du déterminant.
- $\star$ pour déterminer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$.

III. Produit vectoriel dans l'espace



Le produit vectoriel dans l'espace est une opération entre deux vecteurs qui a pour résultat un autre vecteur.

Définition.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
On note $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le ***produit vectoriel*** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est le vecteur défini ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \\ \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ ne sont pas colinéaires : } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \text{ est le vecteur} \\ \qquad \text{de norme } \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \\ \qquad \text{orthogonal à } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \\ \qquad \text{de sens tel que } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \text{ soit une base directe.} \end{cases}$$

Remarque : dans le cas où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on peut aussi écrire $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\overrightarrow{w}$ où $\overrightarrow{w}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exemple : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer la norme, la direction, le sens de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ en déduire ses coordonnées.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale : $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$.

Remarques :

⋆ $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ représente ...

⋆ $\boxed{\text{si } (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}) \text{ est une base orthonormée directe, } \overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath} = \ldots, \quad \overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{k} = \ldots \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\imath} = \ldots}$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit vectoriel est

⋆ .... : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = \ldots$.

⋆ bilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et tout réel λ,

.... (linéarité à droite)

....(linéarité à gauche)

Exemple : $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée directe, on pose : $\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath} - 7\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{k}$.
Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} =$

3) Expression du produit vectoriel avec les coordonnées

Théorème: expression du produit vectoriel avec les coordonnées.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, autrement dit $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$.

Exemple et méthode(s) : dans une base orthonormée directe, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

4) Utilisations du produit vectoriel

a. montrer que deux vecteurs de l'espace sont colinéaires, que 3 points sont alignés

Exemple : dans un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on donne $A(1, -3, 0)$ et $B(-2, 1, 1)$ et $C(2, y, z)$. Déterminer y et z pour que A, B et C soient alignés.

Méthode :

b. construire une base orthogonale ou orthonormale directe

Exemple : dans une base orthonormée, on donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'ils sont orthogonaux, et déterminons un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthogonale directe, puis construisons une base orthonormée directe à partir de cette base.

Méthode : pour construire une base à partir de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires, on calcule $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$:
⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe.

⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est ...

⋆ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, alors ...

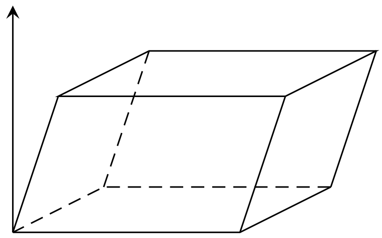
IV. Déterminant dans l'espace ou produit mixte

Définition.
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On note $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le ***déterminant*** (ou ***produit mixte***) des trois vecteurs, c'est le nombre défini par $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Exemple : calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Interprétations géométriques

$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est le volume (orienté) du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.



Propriété fondamentale.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

En effet,

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est

⋆ antisymétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$,

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$$

⋆ trilinéaire : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{x}$, et tout réel λ,

$$\det(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) + \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) \text{ et } \det(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$$

....

....

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$.

Ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Méthode pratique de calcul : règle de Sarrus.

Comptés positivement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{array}\right.$. Comptés négativement : $\left|\begin{array}{ccc|cc} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{array}\right.$.

Exemple : calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4) Utilisations du produit mixte

a. montrer que 3 vecteurs sont coplanaires, ou 4 points coplanaires

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Méthode :

⋆ trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul

⋆ A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

b. calculer un volume de parallélépipède

Exemple : dans une base orthonormée directe, on définit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le volume du parallélépipède formé sur ces vecteurs.