# Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

## ☞ Exercice 1.

Déterminer si les familles suivantes sont libres ? génératrices (de $\mathbb{R}^2$ pour le **1.** et $\mathbb{R}^3$ pour les autres) ?

**1.** $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

**2.** $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

**3.** $\begin{pmatrix}-3\\7\\-10\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

**4.** $\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

## ☞ Exercice 2.

**1.** Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

**2.** Que peut-on en conclure sur la famille de vecteurs $F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$, avec $\overrightarrow{u_1} = (2,-2,3)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1,-1,2)$, $\overrightarrow{u_3} = (3,-1,2)$, $\overrightarrow{u_4} = (-2,-2,3)$.

**3.** Soit $\overrightarrow{u} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer quatre réels $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$ tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \lambda_3\overrightarrow{u_3} + \lambda_4\overrightarrow{u_4}$.

## Exercise 3.

Let $\mathcal{F} = \{(2,0,2,1),\ (-2,0,2,0),\ (2,1,4,1)\}$ be a set of vectors.
Is it linearly independant ? Does it generate $\mathbb{R}^4$ ?

## ★ Exercice 4.

Soit $m$ dans $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de $m$, du caractère libre et du caractère générateur de $\mathbb{R}^3$ de la famille de vecteurs $(1,1,m)$, $(1,m,1)$ et $(m,1,1)$.

## Exercice 5.

Résoudre le système $\begin{cases} x+y-2z-t=0\\ x-y+2z+t=0\\ x+y+2z-t=0\end{cases}$.

En déduire le caractère libre ou générateur (de $\mathbb{R}^3$) de la famille formée par $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{w} = (-2,2,2)$ et $\overrightarrow{t} = (-1,1,-1)$.

## ★ Exercice 6.

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x-y+z=0\}$.

**1.** Montrer que $(-1,-1,1)$ appartient à $F$.

**2.** Montrer que $F = \text{Vect}\,((1,2,0),(0,1,1))$.
*On pourra résoudre le « système »* $\begin{cases}2x-y+z=0\end{cases}$ *en isolant* $y$.

**3.** Déterminer deux réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tels que $(-1,-1,1) = \lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(0,1,1)$.
Existe-t-il deux réels $\mu_1$ et $\mu_2$ tels que $(2,3,1) = \mu_1(1,2,0) + \mu_2(0,1,1)$.

## ★ Exercice 7.

On note $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x-2y+z=0\}$.
Déterminer une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ telle que $\text{Vect}\,(\mathcal{F}) = E$.
Les vecteurs trouvés forment-ils une famille libre ?