Egalités, inégalités, valeur absolue.

I. Manipulations élémentaires d'égalités et inégalités

1) Égalités

Propriété.

Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité préserve l'égalité.
Multiplier ou diviser par un même nombre (non nul) les deux membres d'une égalité préserve l'égalité.

Autrement dit :
Soient a et b deux réels, et λ un réel non nul, alors :

$$\begin{aligned} a = b &\iff a + \lambda = b + \lambda \\ &\iff a - \lambda = b - \lambda \\ &\iff a \times \lambda = b \times \lambda \\ &\iff \tfrac{a}{\lambda} = \tfrac{b}{\lambda} \end{aligned}$$

Propriété.

- Un produit est nul si et seulement si l'un (au moins) des facteurs est nul :

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

- Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et son dénominateur est non nul) :

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

Exemple : résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$: $-2x + 3 = 7$ et $\frac{2x+1}{4x-3} = 0$.

2) Inégalités

- Le sens d'une inégalité est conservé lorsque :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....
- Le sens d'une inégalité est inversé lorsque :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....

Exemples :

- si $x \geqslant -2$, alors x^3 ...... car ....
- soit x tel que $\frac{1}{2} < x < 3$, encadrer $-3x^2$:

soit x tel que $-2 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3}$, encadrer $\frac{1}{x^2} + 1$:

On peut formaliser les règles précédentes :

Propriété.

Soient a et b deux réels, et λ un réel non nul, et f une fonction définie sur un intervalle I qui contient a et b. Alors :

	$a < b \iff a+\lambda < b+\lambda \iff a-\lambda < b-\lambda$
Si $\lambda > 0$, alors	$a < b \iff a\times\lambda < b\times\lambda \iff \frac{a}{\lambda} < \frac{b}{\lambda}$
Si $\lambda < 0$, alors	$a < b \iff a\times\lambda > b\times\lambda \iff \frac{a}{\lambda} > \frac{b}{\lambda}$
Si f est strictement croissante sur I, alors	$a < b \iff f(a) < f(b)$
Si f est strictement décroissante sur I, alors	$a < b \iff f(a) > f(b)$

Remarque : on peut écrire avec des inégalités larges dans toute l'équivalence (et alors la (dé)croissance non stricte suffit).

En particulier :

- inégalité et carré :
  Si a et b sont positifs, alors : $a < b$ est équivalent à $a^2 < b^2$.
- inégalité et inverse :
  Avec a et b de même signe : $0 < a < b$ est équivalent à $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.
  $$a < b < 0 \text{ est équivalent à } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0.$$

Exemple : donner l'ensemble de définition de l'inéquation $\frac{1}{2} < \frac{1}{x-3}$ et la résoudre.

Propriété.

Un produit est positif si et seulement si ses deux facteurs sont de même signe :

$$a \times b > 0 \iff (a > 0 \text{ et } b > 0) \ \text{ OU } \ (a < 0 \text{ et } b < 0)$$

Une fraction est positive si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont de même signe :

$$\frac{a}{b} > 0 \iff (a > 0 \text{ et } b > 0) \ \text{ OU } \ (a < 0 \text{ et } b < 0)$$

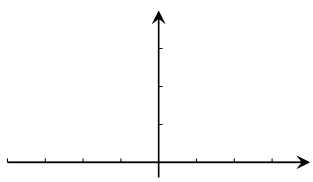
Remarque : pour résoudre une inéquation concernant le signe d'un produit ou d'un quotient, on pourra utiliser des tableaux de signe (voir exercices).

II. Valeur absolue

1) Définition, propriétés algébriques et interprétation géométrique

Définition.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la ***valeur absolue*** de x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.



Exemples : $|-2{,}7| = \ldots$; $|5{,}4| = \ldots\ldots$; $|17-41| = \ldots\ldots\ldots$

$|11-x| = \ldots\ldots\ldots$

si $x = -3,7$, alors $|x| =$

Propriétés algébriques.

Pour tous les réels x et y :

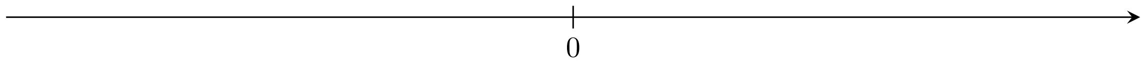
- $\boxed{|xy| = \ \ldots\ldots\ldots}$ et, pour $y \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{x}{y}\right| = \ \ldots\ldots}$
- $|x+y|$ .... (***inégalité triangulaire***)
- $\sqrt{x^2} = \ldots$

Exemples : $\sqrt{3^2} =$ .... et $\sqrt{(-4)^2} = \ldots$

Interprétation géométrique : $\boxed{\text{la valeur absolue d'un nombre représente la distance entre ce nombre et } 0}$, comme si on la mesurait avec une règle. C'est donc toujours un nombre positif.

Ainsi en particulier $|-x| = |x|$, car ....

....

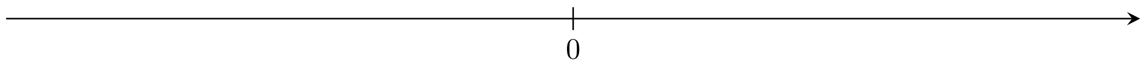


De la même façon, $\boxed{|a-b| \text{ mesure la distance entre } a \text{ et } b}$, en particulier, $|a-b| = |b-a|$.

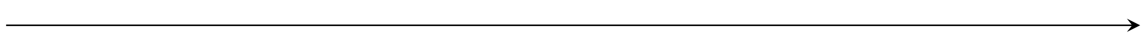
Par exemple $|2-3| = \ldots$, $|3-2| = \ldots$.

2) Équations et inéquations avec la valeur absolue

$|x| = 2$ signifie que la distance entre x et 0 est 2, donc $|x| = 2 \Longleftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
$|x| \leqslant 2$ signifie que la distance entre x et 0 est plus petite que 2, donc $|x| \leqslant 2 \Longleftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$.
$|x| \geqslant 2$ signifie que la distance entre x et 0 est plus grande que 2, donc $|x| \geqslant 2 \Longleftrightarrow$ ....



$|x-3| \leqslant 1$ signifie que la distance entre x et 3 est plus petite que 1, soit $3-1 \leqslant x \leqslant 3+1$.



Propriété.

Pour tout réel X et tout réel positif C :
- $|X| = C \Longleftrightarrow X = C$ ou $X = -C$
- $|X| \leqslant C \Longleftrightarrow -C \leqslant X \leqslant C$ et $|X| < C \Longleftrightarrow -C < X < C$
- $|X| > C \Longleftrightarrow X \in]-\infty, -C[\cup]C, +\infty[$ et $|X| \geqslant C \Longleftrightarrow X \in]-\infty, -C] \cup [C, +\infty[$

Exemples : résoudre $|x-2| = 1$, $|x+5| \leqslant 2$, $|2x-1| \leqslant 3$ et $|x-4| > 1$.