Calculs de dérivées.

I. Fonctions de référence

Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$	Ensemble de validité	Formules de composées associées (u est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_u$)		
			Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$	Ensemble de validité
constante k	0	$\mathbb{R}$			
x	1	$\mathbb{R}$			
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$(u(x))^n$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$	$\mathcal{D}_u$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\{x \in \mathcal{D}_u \mid u(x) \neq 0\}$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\frac{1}{(u(x))^n}$	$-\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$	$\{x \in \mathcal{D}_u \mid u(x) \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\{x \in \mathcal{D}_u \mid u(x) > 0\}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\{x \in \mathcal{D}_u \mid u(x) > 0\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	$\mathcal{D}_u$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$	$\mathcal{D}_u$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\mathcal{D}_u$

De plus : polynômes et fractions rationnelles sont dérivables partout où elles sont définies :

....

....

Exemples :

- $f(x) = \frac{1}{x^3}$: f est dérivable sur ....
- $g(x) = e^{\sqrt{x}}$: ....

II. Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur des ensembles $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$.

⋆ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est dérivable sur $\mathcal{D}_u$ et $\boxed{(\lambda u)' = \lambda u'}$.

⋆ La fonction $u + v$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$ et $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$.

⋆ La fonction $u \times v$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap D_v$ et $\boxed{(u \times v)' = u'v + uv'}$.

⋆ La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_u \cap \{x \in \mathcal{D}_v \,|\, v(x) \neq 0\}$ et $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}}$.

⋆ La fonction $v \circ u$ est dérivable sur $\{x \in \mathcal{D}_u \,|\, u(x) \in \mathcal{D}_v\}$ et $\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$.

Attention : l'ensemble de dérivabilité n'est pas égal à l'ensemble de définition de la dérivée !
Par exemple, ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors que sa dérivée, la fonction inverse, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Il faut donc bien déterminer l'ensemble de dérivabilité à partir de la fonction, et pas à partir de la dérivée.

Exemples :

- $f(x) = \frac{3x^2-7}{\sqrt{x}}$:

- $g(x) = 3x\ln(x)$:

Cas de l'exponentielle complexe : $\boxed{\text{si } f(t) = e^{\varphi(t)} \text{ avec } \varphi \text{ à valeurs complexes, alors } f'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}}$.

Exemples : $f(t) = e^{it}$; $g(t) = e^{\frac{2i\pi}{3}t + i\frac{\pi}{4}}$