Convergence des suites numériques.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

Rappeler les astuces pour lever les indéterminations, et illustrer chacune par un exemple.

Exercice 2.

1. Démontrer que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
En déduire que si $q < -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.

2. Justifier que si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge vers 0.

★ Exercice 3.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1)$.

2. En déduire que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites dont tous les termes sont non nuls.
Pour chacune des propositions suivantes, la démontrer si elle est juste, et donner un contre exemple sinon.

(a) Si $(u_n + v_n)$ converge vers 1, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

(b) Si (u_n) et (v_n) sont divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

(c) Si (u_n) et (v_n) convergent vers 0, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente.

(d) Si (v_n) converge vers 0 et que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge vers 0.

(e) Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente aussi.

(f) Si $(|u_n|)$ est convergente, alors (u_n) est convergente aussi.

(g) Si $(|u_n|)$ est divergente, alors (u_n) est divergente aussi.

☞ Exercice 5.

Déterminer les limites des suites ci-dessous :

(a) $u_n = n\ln(n)$ **(b)** $u_n = \dfrac{7}{3-n^5}$ **(c)** $u_n = n^{-2} - 3n$

(d) $u_n = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ **(e)** $u_n = 3e^{-n}$ **(f)** $u_n = \sqrt{n^2+2n+2} - n$ **(g)** $u_n = \frac{3^n-1}{4^n+1}$

★ Exercice 6.

Soit (u_n) une suite décroissante et minorée.

1. Justifier que $\{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne inférieure, que l'on notera ℓ.

2. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 7.

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
La suite est-elle monotone ? convergente ?

Exercice 8.

Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que (S_n) est monotone.

2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
En déduire que (S_n) est majorée.

3. Montrer que (S_n) est convergente et donner un majorant de sa limite.

Exercice 9.

On considère la suite u définie par $u_0 = 6$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Étudier les variations de f.

2. **(a)** À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu avec la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur $[0, 7]$.

(b) Tracer également la droite d'équation $y = x$ et obtenir, par construction, des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_4.

(c) Peut-on alors émettre une conjecture quant à la convergence de (u_n) ?

3. Étudier les variations de la suite (u_n) (on pourra utiliser une récurrence).

4. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.

5. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?

☞ Exercice 10.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{8}(u_n)^2 + \frac{3}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. En déduire que (u_n) est convergente, et on notera ℓ sa limite.

3. Montrer que ℓ est solution de $\frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$.

4. Résoudre cette équation et déterminer ℓ.

Exercise 11.

Let $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ be the sequence defined by $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prove that for all natural n greater than or equal to 1, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. Determine the montonicity of (S_n).

3. Find the limit of the sequence (S_n).

Exercice 12.

On définit les suites (u_n) et (v_n) pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n!}$.
Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.