Convergence des suites numériques.

En 220 avant J.C., Archimède avait étudié deux suites qui permettaient d'obtenir une très bonne valeur approchée de π. De même, on peut construire une suite qui converge vers la racine carrée d'un nombre, et ainsi en obtenir une valeur approchée par des calculs successifs.

I. Convergence et divergence

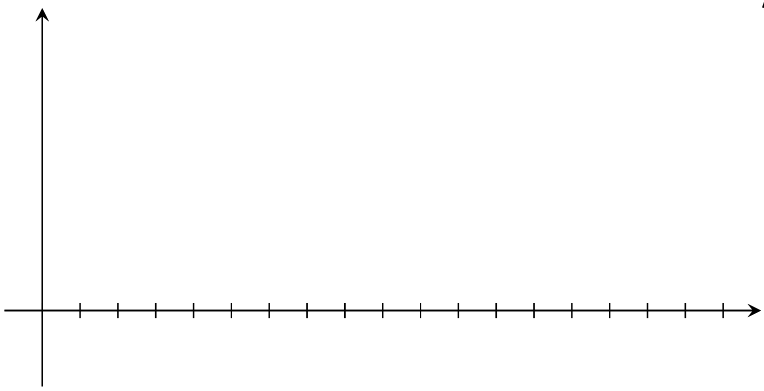
1) limites de suites

Définition : limite finie.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite ℓ (nombre fini) si, pour tout ε strictement positif, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, ce que l'on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_\varepsilon) \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note en ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.



Autre formulation :

Définition : limite infinie.

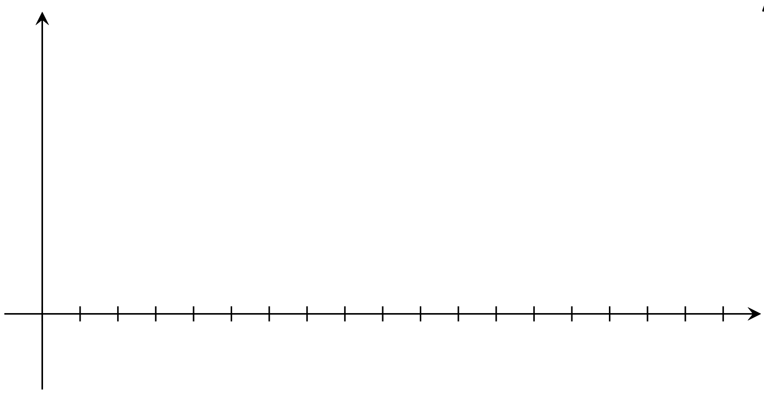
- $\star$ On dit que la suite (u_n) admet la limite $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A, ce que l'on peut écrire :

$$\ldots$$

- $\star$ On dit que la suite (u_n) admet la limite $-\infty$ si ....
....

$$\ldots$$

- $\star$ On note ces relations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$).



Autre formulation pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$:

Propriété.

Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

Illustration :

Vocabulaire :

- ⋆ Une suite qui a une limite finie est appelée ***suite convergente***.
  Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (nombre fini) on dit que ***la suite*** (u_n) ***converge vers*** ℓ.
- ⋆ Une suite qui n'est pas convergente (limite infinie ou pas de limite) est ***divergente***.

2) propriétés des suites convergentes

Propriété.

Toute suite convergente est bornée.

Propriété.

Si (u_n) converge vers une limite ℓ strictement positive, alors tous les termes de (u_n) sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Démonstration :

Propriété de passage à la limite dans une inégalité.

$$\text{Si } \begin{cases} u \text{ converge vers } \ell \\ v \text{ converge vers } \ell' \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n (\text{ou } u_n \leqslant v_n) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell \leqslant \ell'.$$

Illustration : dans le dessin ci-contre, pour tout n, $u_n < v_n$ et (u_n) et (v_n) ont la même limite.

3) convergence et suites extraites

Propriété.

Si une suite (u_n) a une limite, alors toute suite extraite de (u_n) a la même limite.

Conséquence : si on trouve deux suites extraites qui ont des limites différentes, on peut affirmer que la suite principale diverge.

Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge.

Propriété.

Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge vers cette limite commune.

Exemple : la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - 3$ converge.

II. Détermination de limites

1) limites usuelles

La définition de limite de suite étant l'analogue de la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$, toutes les méthodes vues pour les fonctions en $+\infty$ seront valables ici.

Limites usuelles déjà connues :

- n^a $(a > 0)$, $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n ont pour limite $+\infty$
- $\dfrac{1}{n^a}$ ou n^{-a} $(a > 0)$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0

Démonstration de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$:

Théorème.

Soit q un nombre réel.

- $\boxed{\text{si } q > 1, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$
- $\boxed{\text{si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0}$
- si $q = 1$, alors pour tout n, $q^n = 1$
- $\boxed{\text{si } q \leqslant -1, \text{ alors } (q^n) \text{ n'a pas de limite en } +\infty}$

Démonstration dans l'exercice 2.

2) opérations sur les limites

Les mêmes règles que sur les fonctions s'appliquent aux suites.
Pour un rappel des méthodes pour traiter les formes indéterminées, voir l'exercice 1..

Somme :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

Produit :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$		0	$+\infty$	
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$						

Quotient :

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	0	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$					

Composée d'une suite par une fonction :

Propriété.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et une suite (u_n) à valeurs dans I.

Alors, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases} \implies \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ (avec ℓ et a des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Exemples : pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{0,09^n}$ et $y_n = \dfrac{3+\frac{2}{n}}{(-0,3)^n}$ et $z_n = \dfrac{3+\frac{1}{n}}{(-2)^n}$ et $w_n = \sqrt{4+\left(-\frac{3}{4}\right)^n + n^{-3}}$

III. Existence de limites sans calcul explicite

1) par comparaison

Théorème de convergence par encadrement (ou des gendarmes).

Soient u, v et x trois suites réelles, et ℓ un nombre réel.

- On suppose que u et v convergent vers la même limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$. Alors (x_n) converge vers ℓ.
- Si u converge vers 0 et que à partir d'un certain rang, $|x_n - \ell| \leqslant u_n$, alors ....

Théorème de divergence par comparaison.

Soient u et v deux suites réelles.

- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$ et à partir d'un certain rang, ... Alors (v_n) diverge (et a pour limite $+\infty$).
- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$ et à partir d'un certain rang, ... Alors (u_n) diverge (et a pour limite $-\infty$).

Exemples : $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ et $v_n = \sqrt{n} + (-1)^n$

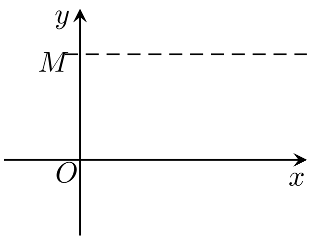
2) avec la monotonie

Théorème de la limite monotone.

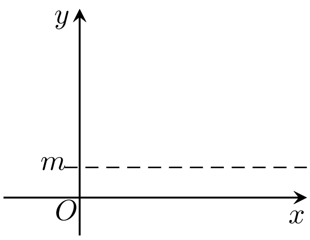
- Une suite ***croissante et majorée*** ....
- Une suite ***croissante et non majorée*** ....
- ....
- ....

Illustrations :

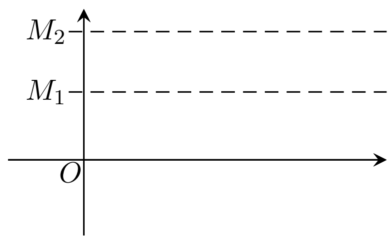
croissante majorée



décroissante minorée



croissante non majorée



Démonstration du cas « décroissante non minorée » :

Remarques : la limite n'est pas nécessairement le majorant ou le minorant : la limite est la borne supérieure (ou inférieure) des valeurs de la suite (voir démonstration exercice 6).
La suite peut n'être croissante (ou décroissante) que à partir d'un certain rang.

Application aux suites récurrentes : par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{8}(u_n)^2 + \frac{3}{2}$.
Pour étudier sa convergence (voir exercice 10. pour la réalisation) :

- on montre par récurrence qu'elle est minorée par 0 et décroissante ;
- par le théorème de convergence monotone, on peut affirmer qu'elle converge, on note ℓ sa limite ;
- par opérations sur les limites, on a $\frac{1}{8}(u_n)^2 + \frac{3}{2} \to \frac{1}{8}\ell^2 + \frac{3}{2}$
  d'autre part (u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc $u_{n+1} \to \ell$
  donc par unicité de la limite, $\ell = \frac{1}{8}\ell^2 + \frac{3}{2}$.
- les solutions de $\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2} = x$ sont 6 et 2
  or $u_0 = 5$ et (u_n) décroissante donc (u_n) ne peut pas converger vers 6 donc $\ell = 2$.

3) suites adjacentes

Définition.

Deux suites u et v sont dites ***adjacentes*** si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Propriété.

Deux suites adjacentes sont convergentes, vers la même limite.

De plus, si u et la suite croissante, v la suite décroissante, alors en notant ℓ la limite commune, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Exemple : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par leurs termes généraux : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.

Application : principe de dichotomie pour trouver le 0 d'une fonction.