Probabilités conditionnelles et indépendance.

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

1. Une expérience aléatoire consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées.
On définit les événements suivants :
A : « toutes les pièces tombent du même côté »
B : « au plus une pièce donne face ».

(a) décrire l'univers Ω ;

(b) décrire par des phrases $\overline{A}$ et $\overline{B}$;

(c) A et B sont-ils incompatibles ?

(d) proposer un système complet d'événements formé de 3 événements.

2. On effectue la même expérience mais avec trois pièces de monnaie équilibrées.
Reprendre les questions **(a)**, **(b)**, **(c)** et **(d)** dans cette situation.

☞ Exercice 2.

Deux escargots A et B font la course sur une feuille de salade infinie. On suppose que
- si A est en tête au centimètre n, il le sera à nouveau au centimètre $n+1$ avec une probabilité $\dfrac{3}{4}$;
- si B est en tête au centimètre n, il le sera à nouveau au centimètre $n+1$ avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- l'escargot A est en tête au centimètre 1;
- il n'y a jamais égalité au bout d'un nombre entier de centimètres.

On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « l'escargot A est en tête au centimètre n ».

1. Donner la valeur de p_1.

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. Vérifier que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = p_n - \frac{2}{3}$, est géométrique.

4. En déduire les expressions de q_n puis de p_n en fonction de n.

☞ Exercice 3.

On considère une boîte contenant 5 jetons rouges et 3 jetons verts, indiscernables au toucher.
On tire au hasard trois jetons, en les prenant un par un, sans remettre le jeton pioché dans la boîte.

1. Quelle est la probabilité que le premier et le troisième jetons piochés soient verts, et le deuxième soit rouge ?

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un jeton rouge au cours des trois tirages ?

3. Sachant qu'il y a au moins un jeton rouge au cours des trois tirages, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?

Exercice 4.

Dans une usine, on fait une révision et un réglage de toutes les machines. Avant réglage, on estime que chaque machine produit 60% de pièces défectueuses. Après réglage, ce pourcentage devient 20%. Les pièces sont fabriquées indépendamment les unes des autres.
Le technicien sait que la moitié des machines a été révisée, mais il ne sait pas lesquelles ... Il teste alors 2 pièces sortant d'une machine : elles sont toutes les deux défectueuses. Quelle est la probabilité que cette machine ait été révisée ?

Exercice 5.

Il existe un test pour dépister une maladie, mais il n'est pas tout à fait fiable.

On sait que :
- lorsque l'individu est malade, le test est positif dans 99% des cas.
- lorsque l'individu n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

1. On considère ici que la maladie touche une personne sur 1000 dans la population considérée

(a) Un personne a fait le test, celui-ci donne un résultat positif.
Quelles sont ses chances d'être vraiment malade ?

(b) Son voisin a aussi fait le test, et il est négatif.
Quelles sont ses chances d'être malade quand même ?

2. Reprendre les questions du **1.** en considérant maintenant que la maladie s'est répandue et touche une personne sur 100.

Exercice 6.

On s'intéresse à la formule qui permet de calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k$.

On interroge des étudiants sur le résultat de cette somme et on propose trois choix :

A : « $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{n(n+p)}{2}$ » B : « $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$ » C : « $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$ »

Tout étudiant connaissant la réponse correcte la donne, sinon il choisit au hasard entre les trois réponses proposées.

On appelle S l'événement « l'étudiant connaît la bonne réponse », et A (respectivement B et C) l'événement « l'étudiant donne la réponse A (respectivement B et C) ».

1. Quelle est la bonne réponse ?

2. **(a)** Exprimer $\mathbf{P}(A)$ en fonction de $\mathbf{P}(S)$. (*utiliser la formule des probabilités totales*)
De la même façon, exprimer $\mathbf{P}(B)$ en fonction de $\mathbf{P}(S)$.

(b) En fait, un étudiant sur 2 donne la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'un étudiant connaisse réellement la bonne réponse ?

3. Quelle est la probabilité qu'un étudiant qui a donné la bonne réponse connaisse vraiment la formule ?

☞ Exercice 7.

On dispose de 12 jetons numérotés de 1 à 12, et on en pioche un au hasard.

On note A l'événement « le jeton pioché porte un numéro pair » et B l'événement « le jeton pioché porte un nombre multiple de 3 ».

A et B sont-ils indépendants ?

Que se passe-t-il si il y a désormais 13 jetons numérotés de 1 à 13 ?

Exercice 8.

On dispose de 3 urnes U_1, U_2 et U_3, dont chacune contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire une boule de U_1 puis une boule de U_2 et on les place dans l'urne U_3. On tire ensuite une boule dans U_3.

1. Quelle est la probabilité que les 3 tirages amènent des boules noires ?

2. Quelle est la probabilité de piocher une boule noire dans U_3?

3. On a obtenu une boule noire dans U_3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule noire dans U_1 et une boule noire dans U_2?

★ Exercise 9.

The probability that the bulb will work longer than 800 hours is $0,2$. We have three bulbs in the hallway. The three bulbs are mutually independant.

What is the probability that after 800 hours of service at least one of them will still work ?