Calculs trigonométriques et équations avec des complexes

☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

1. Linéariser les expressions suivantes.
$f(x) = \sin^5(x)$; $g(x) = \sin^3(x)\cos(x)$ et $h(x) = \cos^6(x)$.

2. Donner une primitive de f, g et h.

☞ Exercice 2.

1. **(a)** Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(3x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
(b) Résoudre $\sin(3x) = 8\sin^3(x)$.

2. **(a)** Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
★ **(b)** Dans l'expression de $\cos(5x)$, en prenant $x = \frac{\pi}{10}$, déterminer une équation polynomiale de degré 5 vérifiée par $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 3.

1. En remarquant que $\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ik\frac{\pi}{3}}\right)$, réduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ où $n \geqslant 1$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

★ Exercice 4.

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

★ Exercise 5.

Let z and z' be two complex numbers. We assume that they have the same absolute value.
Prove that $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ is a real number and is positive.

☞ Exercice 6.

Résoudre : $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ $\quad z^2 = 5 + 12i$ $\quad z^2 = 2 - 2i$

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

☞ **(a)** $iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0$ **(b)** $2z^2 - (1+9i)z - 7 + 11i = 0$ **(c)** $3z^4 + 17z^2 + 20 = 0$
(d) $z^2 + 4iz - 7 - 4i = 0$ ★ **(e)** $z^6 + z^3 + 1 = 0$

(*pour* ***(c)*** *on pourra commencer par factoriser* $3Z^2 + 17Z + 20$)

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^3 = i$ ☞ **(b)** $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$ **(c)** $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ **(d)** $32 + iz^5 = 0$

Exercice 9.

Soit le polynôme défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis déterminer un polynôme Q tel que $P(z) = (z^2+3)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Quelle est la nature du quadrilatère formé par les images dans le plan complexe des quatre solutions trouvées ?