

CALCULS TRIGONOMETRIQUES ET ÉQUATIONS AVEC DES COMPLEXES

- ☞ **Exercice ou question basique à savoir refaire**
 ★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

☞ Exercice 1.

- Linéariser les expressions suivantes.
 $f(x) = \sin^5(x)$; $g(x) = \sin^3(x) \cos(x)$ et $h(x) = \cos^6(x)$.
- Donner une primitive de f , g et h .

☞ Exercice 2.

- Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(3x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
- Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
- ★ Dans l'expression de $\cos(5x)$, en prenant $x = \frac{\pi}{10}$, déterminer une équation polynomiale de degré 5 vérifiée par $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 3.

- En remarquant que $\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ik\frac{\pi}{3}}\right)$, réduire la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ où $n \geq 1$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

★ Exercice 4.

Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

★ Exercice 5.

Let z and z' be two complex numbers. We assume that they have the same absolute value. Prove that $\frac{(z+z')^2}{zz'}$ is a real number and is positive.

☞ Exercice 6.

Résoudre : $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ $z^2 = 5 + 12i$ $z^2 = 2 - 2i$

Exercice 7.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- ☞ (a) $iz^2 + (i + 3)z + 2 - 2i = 0$ (b) $2z^2 - (1 + 9i)z - 7 + 11i = 0$ (c) $3z^4 + 17z^2 + 20 = 0$
 (d) $z^2 + 4iz - 7 - 4i = 0$ ★ (e) $z^6 + z^3 + 1 = 0$

Exercice 8.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $z^3 = i$ (b) $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$ (c) $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ (d) $32 + iz^5 = 0$

Exercice 9.

Soit le polynôme défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis déterminer un polynôme Q tel que $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère formé par les images dans le plan complexe des quatre solutions trouvées ?