Calculs trigonométriques et équations avec des complexes

I. Utilisation des nombres complexes pour transformer des expressions trigonométriques

1) $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$ ou $\cos(nx)$, $\sin(nx)$

a. Linéariser : $\cos^n(x)$ **ou** $\sin^n(x) \rightsquigarrow \cos(kx)$ **ou** $\sin(kx)$

Intérêt : par exemple trouver des primitives, ou des solutions particulières d'équations différentielles ...

Méthode : formule d'Euler, développement avec binôme de Newton, et formules d'Euler dans l'autre sens.

rappel formules d'Euler : $\sin(\theta) =$ .... et $\cos(\theta) =$ ....

ou ....

rappel formule du binôme de Newton : $(a+b)^n =$ ....

Exemple : linéariser $\sin^4(x)$ et en déduire une primitive.

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$$

$$= \dots$$

Remarque : on peut aussi linéariser des produits de puissances de cosinus ou sinus, dans ce cas, bien terminer le développement avant de réutiliser les formules d'Euler. voir exercice 1. fonction g

b. Dé-linéariser (factoriser) : $\cos(nx)$ **ou** $\sin(nx) \rightsquigarrow \cos^k(x)\sin^l(x)$

Intérêt : factoriser des expressions, pour par exemple, résoudre une équation ou trouver le signe ...

Méthode : formule de Moivre, développement avec binôme de Newton, puis partie réelle ou imaginaire.

rappel formule de Moivre : ...

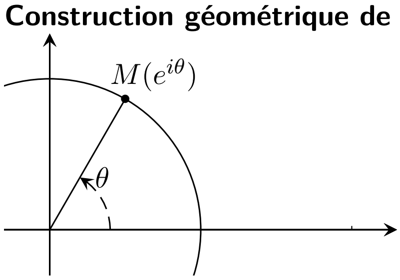
donc $\cos(nx) =$ .... et $\sin(nx) =$ ....

Exemple : dé-linariser $\cos(3x)$ puis résoudre l'équation $\cos(3x) + 4\cos(x) = 0$.
Avec la formule de Moivre : $\cos(3x) = \mathrm{Re}\Big(\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^3\Big)$.

Or $\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^3 =$ ....

2) Factorisation de $1 \pm e^{i\theta}$ et $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$

Construction géométrique de $1 + e^{i\theta}$:



Calcul de $1 + e^{i\theta}$:

Généralisation au calcul de $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$: $\boxed{\text{on factorise par } e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$.

Par exemple $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Application aux formules de trigonométrie : $\cos(p)+\cos(q) = \mathrm{Re}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)$ et $\sin(p)+\sin(q) = \mathrm{Im}(e^{ip}+e^{iq})$.

Or $e^{ip}+e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\Big(\dots$

II. Équations remarquables dans $\mathbb{C}$

1) Polynômes de degré 2

a. Résoudre $z^2 = \omega$ avec $\omega \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{Si } \omega \neq 0\text{, cette équation a toujours deux solutions dans } \mathbb{C}\text{, et elles sont opposées.}}$

Exemples et remarque :

$z^2 = -9$ ....

$z^2 = 16$ ....

En fait il s'agit d'une généralisation de ce que l'on connaît déjà pour les réels strictement positifs : $x^2 = 4$ a exactement deux solutions opposées.

Méthode :

- 1er cas : la forme trigonométrique de ω est simple : $\omega = \rho e^{i\theta}$.
  Les solutions de l'équation $z^2 = \rho e^{i\theta}$ sont $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- Sinon : on cherche z sous forme algébrique $x + iy$.

  (i) $z^2 = \dots$

  on en déduit deux équations : $\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

  (ii) $|z^2| = |\omega|$, donc $\dots$
  on calcule $|\omega|$ et on en déduit une troisième équation.

  (iii) on résout le système en trouvant d'abord x^2 (avec (1) et (3)), puis deux possibilités pour x et en utilisant (2), on trouve les deux possibilités associées pour y.

Exemples : résolvons $z^2 = 9i$ et $z^2 = 3 - 4i$.

b. Résoudre $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes.

Les mêmes calculs que dans $\mathbb{R}$ sont valables, mais on ne peut pas utiliser la racine carrée !

Méthode : on calcule $\Delta =$ .... :

- ⋆ si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution $-\frac{b}{2a}$;
- ⋆ si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$ avec δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

  Pour trouver δ, on utilise l'une des deux méthodes de la page précédente.

Exemples : résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $-z^2 + \sqrt{3}z - i = 0$ et $z^2 + (-2+2i)z - 2i = 0$.

2) Racines n-ièmes : équations $z^n = \omega$

a. Racines n-ièmes de l'unité : solutions de $z^n = 1$

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle ***racine n-ième de l'unité*** tout complexe z tel que $z^n = 1$.
L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité se note $\mathbb{U}_n$.

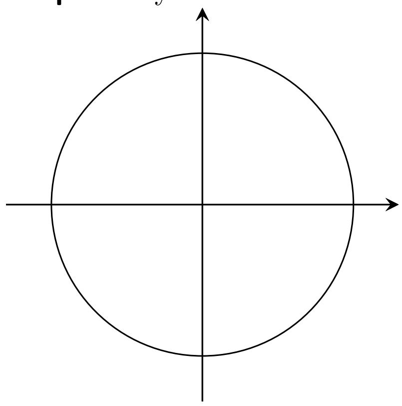
Exemples : $\mathbb{U}_1 = \ldots\ldots$; $\mathbb{U}_2 = \ldots$

Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{n}}; e^{\frac{4i\pi}{n}}; \ldots; e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} \right\}$$

Remarque : il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.



Propriété.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Démonstration :

b. Racines n-ièmes d'un nombre complexe : solutions de $z^n = \omega$

Théorème.

Il existe n nombres complexes z tels que $z^n = \rho e^{i\theta}$ (où $\rho > 0$).
Ce sont les $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Remarques :

- on rappelle que $\sqrt[n]{\rho}$ est l'antécédent positif de ρ par la fonction réelle $x \mapsto x^n$, autrement dit $\sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$.
- on peut aussi écrire l'ensemble de ces racines sous forme $z_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ et $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Exemple. Résoudre $z^4 = 81i$ et $z^5 = -16 + 16i\sqrt{3}$.