Applications.

Exercice 1.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis écrire leurs négations.
1. f est à valeurs positives. **2.** f s'annule. **3.** f est constante.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, tracer le graphique d'une (ou plusieurs) fonction(s) définie(s) sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la propriété.
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.
4. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant f(a)$.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer : $f([-1,4])$, $f^{-1}([-1,4])$, $f(]-\infty,3])$, $f^{-1}(f([0,3]))$ et $f(f^{-1}([-3,2]))$.

Exercice 4.

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.
On note A et B deux parties de E.
1. Montrer que si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 5.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$.
Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.
2. Soit g application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
g est-elle injective ? surjective ?
3. Pour un entier n quelconque, déterminer $g \circ f(n)$ et $f \circ g(n)$.
(*on pourra commencer par des exemples*).

Exercice 6.

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,x') & \mapsto & (x+x', xx') \end{array}$

4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x-a| \end{array}$ où a est un réel fixé

Exercice 7.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ est-elle injective ?

Exercice 8.

Montrer que les applications suivantes sont des bijections, et déterminer leurs applications réciproques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-7 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{3-x} \end{array}$$

Exercice 9.

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est-elle bijective ?

***** Comment réduire les ensembles pour que ce soit le cas ?

* Exercice 10.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des bijections.
Montrer que $g \circ f$ est une bijection de E dans G.
Justifier que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.