Introduction : vecteurs, bases, barycentres.

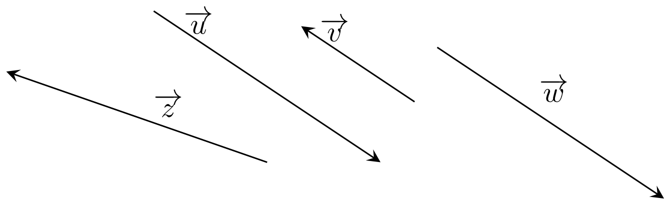
Les vecteurs représentent des grandeurs physiques comme des forces, des vitesses, des champs (magnétiques, gravitationnels ...), qui ont nécessité la mise en place des repères.

En mathématiques, ils sont le fondement de l'algèbre linéaire, qui étudie les espaces vectoriels que nous verrons au 2ème semestre. L'algèbre linéaire fait le lien entre des problèmes algébriques (systèmes d'équations par exemple) et des problèmes géométriques (intersections de droites, transformations du plan ...), grâce notamment aux repères et coordonnées.

I. Vecteurs.

Un ***vecteur*** traduit un déplacement, il est caractérisé par 3 éléments : sa direction, son sens, et sa longueur.

Exemple :



⋆ ils ont même direction : ....

⋆ ils ont même sens : ....

⋆ ils ont même longueur : ....

En particulier, ...

....

Remarques : Si A et B sont deux points distincts, on peut former un vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec pour caractéristiques : la direction de la droite (AB), le sens de A vers B, et la longueur AB.
La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa ***norme***, et on note $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé ***vecteur nul*** et aussi noté $\overrightarrow{0}$. Et $\|\overrightarrow{0}\| = 0$.

Propriété.

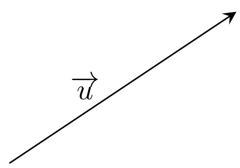
Pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

1) Opérations sur les vecteurs

Relation de Chasles : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Définition.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel.
- si $k = 0$, alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
- si $k > 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur
  - ⋆ de même direction que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de même sens que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de norme $k\|\overrightarrow{u}\|$;
- si $k < 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur
  - ⋆ de même direction que $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de sens opposé à $\overrightarrow{u}$
  - ⋆ de norme $-k\|\overrightarrow{u}\|$ (ou $|k|\,\|\overrightarrow{u}\|$).



Remarque : si A et B sont deux points du plan, alors $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Exemple : simplifier les expressions suivantes : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$ et $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

2) Colinéarité, coplanarité, familles libres, liées

Définition.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Autrement dit, soit l'un des deux vecteurs est nul, soit ils ont la même direction.

Exemples :

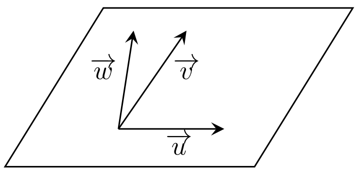
Remarques :

- le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur, en effet : ...
- deux vecteurs sont colinéaires lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles, par exemple : on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$: ....

Définition.

Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w} + k'\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{v}$.

Illustration :



Propriété.

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe deux réels α et β non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Exemples : dans l'illustration ci-dessus, ...

Définition (complément).

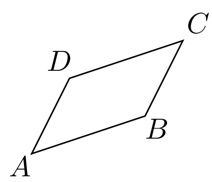
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, autrement dit : ....
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas coplanaires : ....

Remarque : une famille qui n'est pas libre est dite ***liée***.

Propriété.

Soient A, B, C et D des points distincts :

⋆ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles.
⋆ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les points A, B et C sont alignés.
⋆ $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



II. Bases et repères

1) Bases, orientation (vecteurs)

Définition.

Une ***base*** du plan $\mathcal{P}$ est un couple de deux vecteurs non colinéaires.
Dans l'espace $\mathcal{E}$, une ***base*** est un triplet de trois vecteurs non coplanaires.
En général une base du plan est notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et une base de l'espace $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Théorème.

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ étant une base du plan $\mathcal{P}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels x et y tels que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}}$.
Le couple (x, y) est unique et est appelé ***couple de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si besoin de précision sur la base).

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ étant une base de l'espace $\mathcal{E}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$, c'est-à-dire qu'il existe trois réels x, y et z tels que $\boxed{\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}}$.
Le triplet (x, y, z) est unique et est appelé ***triplet de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (ou $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si besoin de précision sur la base).

Orientation. Le plan est en général orienté suivant le sens trigonométrique (sens anti-horaire).
Dans l'espace, on peut orienter un plan $\mathcal{P}$ suivant un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui n'est pas dans le plan : le vecteur $\overrightarrow{u}$ pointe vers le demi-espace d'observation de $\mathcal{P}$, et vu de ce demi-espace, on oriente $\mathcal{P}$ dans le sens trigonométrique.

Différents types de bases :

- $\star$ La base du plan est dite ***orthogonale*** si la mesure principale de l'angle non orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est $\frac{\pi}{2}$.
  Dans l'espace, les trois angles non orientés $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$ doivent mesurer $\frac{\pi}{2}$.
- $\star$ La base est dite ***orthonormale*** (ou ***orthonormée***) si elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont de norme 1.
- $\star$ La base est dite ***directe*** si la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (orienté par $\overrightarrow{k}$ dans l'espace) est positive (autrement dit, une mesure de l'angle orienté est entre 0 et π).

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ forment une base du plan car ....

On note $\mathcal{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Repères cartésiens (points)

Définition.

Un ***repère cartésien*** est la donnée d'un point et d'une base.
Un repère est qualifié de direct, orthogonal, orthonormal … si sa base l'est.

Définition.

Soit $\mathcal{R}$ un repère du plan (resp. de l'espace) $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$).
Les ***coordonnées cartésiennes*** d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (respectivement $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) :

⋆ si M est un point du plan, M a pour coordonnées (x, y) signifie que $\overrightarrow{OM} = \ldots$
⋆ si M est un point de l'espace, M a pour coordonnées (x, y, z) signifie que $\overrightarrow{OM} = \ldots$

3) Utilisation des coordonnées

Propriété.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B), et soit k dans $\mathbb{R}$.

- Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Même chose dans l'espace avec trois coordonnées.

Théorème.

Dans un repère orthonormé , la ***norme*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui correspond à la distance AB est donnée par la formule :

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ dans le plan ;
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ dans l'espace.

Illustration :

Exemple : soient $A(3; -1)$ et $B(2; 5)$ dans un repère orthonormé, on note I le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} =$ et $\|\overrightarrow{AB}\| =$ et $-2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$

les coordonnées de I sont ……………………………………………………………………

III. Barycentres

Théorème.

Soient A_1, A_2, ..., A_n des points.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.
Alors il existe un unique point G vérifiant $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$.
Ce point G est appelé ***barycentre du système de points pondérés*** $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$.

Théorème de réduction.

Si G est le barycentre de (A_1, α_1), (A_2, α_2),..., (A_n, α_n), alors pour tout point M, $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$.

Vocabulaire : lorsque tous les coefficients sont identiques, on parle d'***isobarycentre***.

Interprétation : le centre d'inertie d'un solide, et son centre de gravité peuvent être vus comme des barycentres de tous les points de ce solide.

1) cas particulier avec deux points

Avec deux points A et B et deux réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

$\boxed{\text{Le barycentre } G \text{ vérifie : } \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}.}$

Justification de l'existence et construction :

Exemple : on dispose d'une planche, aux deux bouts sont disposés des poids, d'une masse de 1kg à l'extrémité A, et 2kg à l'extrémité B.
Par où faut-il porter la planche pour qu'elle soit à l'équilibre ?

Formule du milieu : le milieu d'un segment $[AB]$ est le barycentre de $(A, 1)$, et $(B, 1)$ (ou de $(A, 3)$ et $(B, 3)$...), on dit aussi que c'est l'isobarycentre de A et B.

Alors d'après le théorème de réduction, $\boxed{\text{si } I \text{ est le milieu de } [AB], \text{ alors pour tout point } M,\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}}$.

2) cas particulier avec trois points

Théorème et définition.

Soient A, B et C trois points du plan, et α, β et γ des nombres réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Alors il existe un unique point G tel que $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}}$.
Ce point est appelé ***barycentre du système de points pondérés*** $(A,\alpha),(B,\beta)$ ***et*** (C,γ).

Exemples : le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$ est le centre de gravité du triangle ABC (on l'appelle aussi ***isobarycentre*** de A, B et C).
C'est aussi le point d'intersection des médianes du triangle (droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé), cela permet de le construire facilement.

Théorème de réduction avec 3 points.

On note G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).
Alors pour tout point M, $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$.

Démonstration : ....

....

....

....

....

Applications :

- **pour déterminer les coordonnées du barycentre** : $\boxed{\begin{array}{l} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C) \\ \\ y_G=\dots \\ \\ z_G=\dots \end{array}}$

  (formules obtenues avec le théorème précédent pour $M=O$)

  Par exemple, on donne $A(-1,4)$, $B(3,0)$ et $C(3,-2)$, déterminer les coordonnées de G, barycentre de $(A,1)$, $(B,-2)$ et $(C,5)$.

- **pour construire le barycentre :** $\boxed{\text{appliquer le théorème de réduction et remplacer } M \text{ par un des points}}$, par exemple pour $M=A$: $\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{AG}$, on peut donc exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  Par exemple, construire le barycentre des points $(A,-1)$, $(B,2)$ et $(C,1)$.