Trigonométrie.

Le mot ***trigonométrie*** vient du grec : *trigonos*, triangulaire et *metron* mesure.
L'étude des mesures dans un triangle commence dans l'antiquité, et des tables trigonométriques sont déjà construites vers 100 avant JC.
En plus des problèmes géométriques, la trigonométrie est utilisée au départ pour du repérage, en astronomie et en navigation. Désormais les fonctions trigonométriques (cosinus et sinus) sont aussi exploitées pour traduire un signal périodique.

I. Introduction

1) Cercle trigonométrique

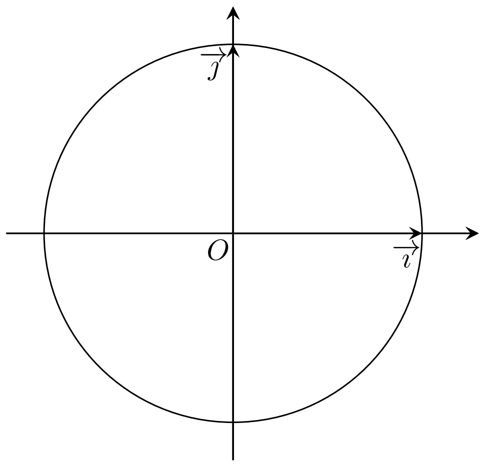
Définition.
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition.
Soit θ un nombre réel. On considère un mobile M, situé initialement sur le point I de coordonnées $(1, 0)$, et se déplaçant sur le cercle trigonométrique.
- Si $\theta \geqslant 0$, le mobile M se déplace sur le cercle dans le sens direct et s'arrête après avoir parcouru une distance θ.
- Si $\theta < 0$, le mobile M se déplace sur le cercle dans le sens indirect et s'arrête après avoir parcouru une distance $|\theta| = -\theta$.

On note $M(\theta)$ le point d'arrivée du mobile M et on dit que $M(\theta)$ est l'image de θ sur le cercle trigonométrique.

Remarque : le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π.

Exemples : placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :
$M(0)$, $M(2\pi)$, $M(4\pi)$, $M(\pi)$, $M(\frac{\pi}{2})$, $M(\frac{\pi}{4})$, $M(\frac{3\pi}{4})$, $M(-\frac{\pi}{2})$, $M(\frac{5\pi}{2})$ et $M(-\frac{3\pi}{2})$.

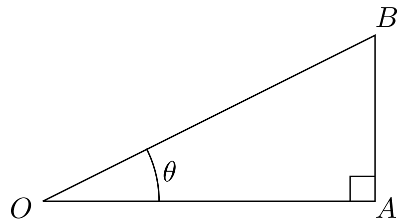


Remarque : tout point du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de nombres réels, tous égaux à 2π près.

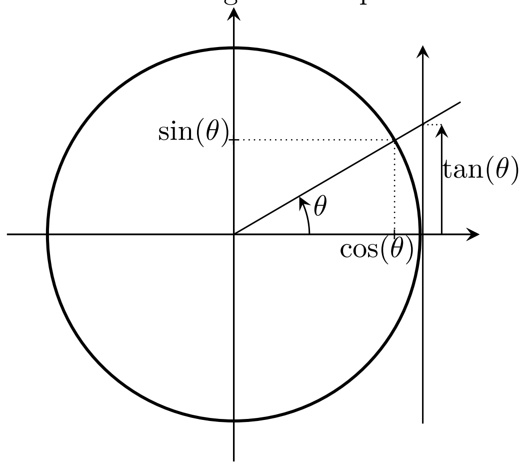
Définition.
Soit M un point du cercle trigonométrique.
Si x est un réel tel que M soit l'image de x sur le cercle trigonométrique, alors on dit que x est ***une mesure en radians*** de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

2) Cosinus, sinus et tangente

Dans un triangle OAB rectangle en A :



Dans le cercle trigonométrique :



$\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$: abscisse de $M(\theta)$

$\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$: ordonnée de $M(\theta)$

$\tan(\theta) = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

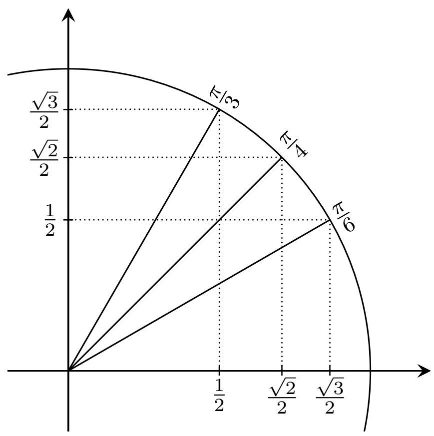
Conséquence directe : d'après le théorème de Pythagore, on montre que $\boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1}$.

II. Propriétés des cosinus et sinus

Pour tout angle θ, $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$.
Et $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$.

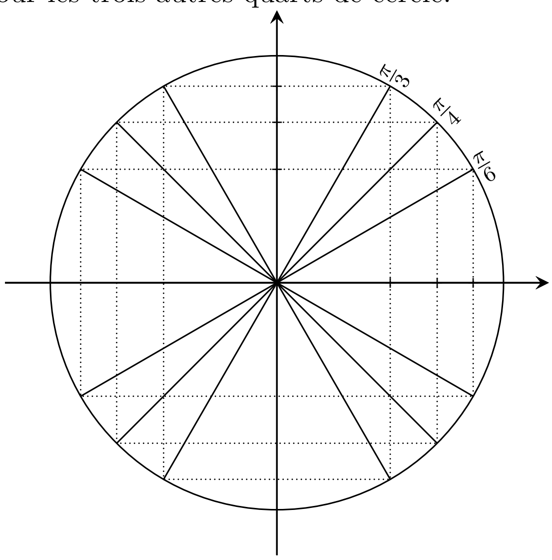
1) Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$						
$\sin(\theta)$						

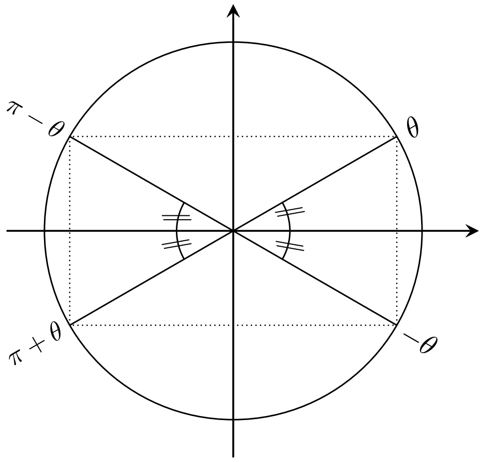


Par symétries, on peut déduire les valeurs pour les trois autres quarts de cercle.

Par exemple : donner les valeurs des cosinus et sinus de $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{38\pi}{3}$.



2) Angles associés et résolution d'équations



Propriété.

Pour tout réel θ,

$\cos(-\theta) =$ $\sin(-\theta) =$

$\cos(\pi - \theta) =$ $\sin(\pi - \theta) =$

$\cos(\pi + \theta) =$ $\sin(\pi + \theta) =$

Conséquences : cas d'égalité.

$\cos(x) = \cos(a) \iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$

$\sin(x) = \sin(a) \iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$

Application aux équations : résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$:

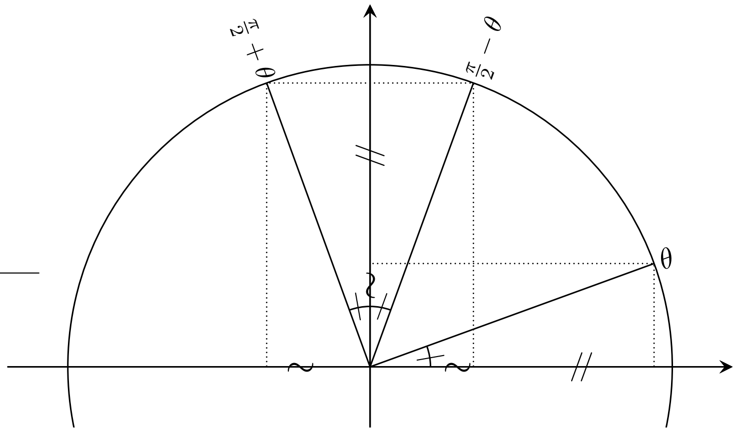
(a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ **(b)** $\cos(x) = \frac{4}{3}$ **(c)** $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

Propriété.

Pour tout réel θ,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$



Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \sin(x)$.

3) Addition et conséquences

Propriété.

Pour tous réels a et b :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

(*on démontrera ces deux formules avec les nombres complexes*)

Corollaire 1.

Pour tous réels a et b :

$\cos(a-b) =$ $\sin(a-b) =$

$\cos(2a) =$ $\sin(2a) =$

$\cos(2a) =$

$\cos(2a) =$

Justification :

Conséquence : $\boxed{\cos^2(a) = \frac{1}{2}\left(\cos(2a)+1\right) \text{ et } \sin^2(a) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2a)\right)}$.

Corollaire 2.

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Démonstration : dans un premier temps, on va calculer $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$.

4) Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t - \varphi)$

Propriété.

Pour tous réels a, b, ω et t, on a : $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$
avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et φ vérifiant $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemple : on va transformer $\cos\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{t}{2\pi}\right)$.

Méthode : pour trouver A et φ tels que $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$.

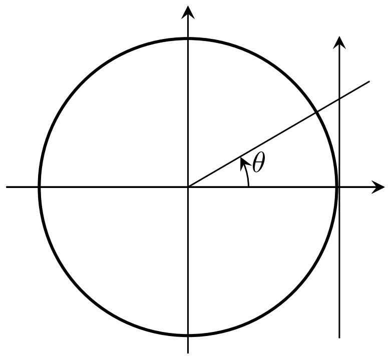
III. Tangente

La tangente est définie pour tout angle θ différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par $\boxed{\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$.

Les propriétés principales de la tangente peuvent donc se déduire de celles de cosinus et sinus.

1) Valeurs remarquables

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\tan(\theta)$						



2) Angles associés et résolution d'équations

Propriété.

Pour tout réel θ et sous réserve d'existence :
$\tan(-\theta) =$ $\tan(\pi - \theta) =$ $\tan(\pi + \theta) =$

Cas d'égalité : $\tan(x) = \tan(a) \iff \ldots$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = 1$.