Généralités sur les suites numériques.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \cos(n\pi)$.
Étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Que peut-on en déduire ?

2. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.
Étudier les suites extraites (v_{4n}), (v_{4n+1}), (v_{4n+2}) et (v_{4n+3}).

3. On appelle (w_n) la suite $w_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
Étudier les suites extraites (w_{3n}), (w_{3n+1}) et (w_{3n+2}).

Exercice 2.

Les suites (u_n) sont-elles majorées? minorées? bornées?

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + (n-1)^2$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{-2n+1}$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5\frac{n}{n+1}$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2n^2 - 4n + 2$

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \frac{1}{n^2+1}$

☞ Exercice 3.

Étudier la monotonie des suites suivantes:

1. $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$

2. $u_n = \dfrac{3^n}{5^{n+2}}$

3. $u_n = \frac{n+1}{n}$

4. $u_n = 2 \times 4^n - 5$

5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

6. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

★ Exercice 4.

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

☞ Exercice 5. Sens de variation par récurrence.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

1. **(a)** La suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, calculer v_1, v_2 et v_3, et retrouver graphiquement ces valeurs par construction (tracer la courbe de f et la droite d'équation $y = x$).

(b) Montrer par récurrence que (v_n) est croissante.

2. On définit la suite (w_n) par $w_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f(w_n)$.

(a) Construire les premiers termes sur le graphique précédent, la suite semble-t-elle monotone ? croissante ou décroissante ? Le prouver par récurrence.

(b) Écrire un programme Python `suite(n)` qui renvoie la liste des valeurs de la suite entre les rangs 0 et n.

☞ Exercice 6.

Reconnaître le type de suite puis calculer son terme général et la somme de ses $n+1$ premiers termes :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n$

2. $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - 4$

3. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} = u_n$

4. $u_2 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = -\sqrt{3}\, u_n$

5. $u_1 = 10$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = 3$

6. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+1} - 2u_n = 0$

☞ Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2 \times 5^n$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{5^n}$ est arithmétique.

2. En déduire en fonction de n, l'expression de v_n, puis celle de u_n.

Exercice 8. Suite arithmético-géométrique.

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

1. Résoudre l'équation $x = \frac{2}{3}x + 1$, on note α la solution.

2. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique.

3. Donner le terme général de v_n et en déduire celui de u_n.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{17} u_k$.

Exercice 9.

Soient (x_n) et (y_n) des suites définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ et pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 2 \end{cases}$.

1. On appelle (r_n) la suite définie pour tout n par $r_n = x_n + y_n$.

(a) Calculer r_0.

(b) Montrer que (r_n) est une suite arithmétique.

(c) Donner alors le terme général de (r_n).

2. On appelle (s_n) la suite définie pour tout n par $s_n = 2x_n + y_n$.
Prouver que (s_n) est géométrique et donner l'expression de s_n en fonction de n.

3. Utiliser les questions **1.(c)** et **2.** pour déterminer le terme général de (x_n) et celui de (y_n).

Exercice 10. Exponential growth in real life.

Calculatrice autorisée pour les applications numériques.

1. A sheet of paper is roughly 0.1mm thick. How many times should we fold it in order to get a thickness larger than the distance between earth and moon (around 400,000 km) ?
Write a function in Python `paper` that could check your result.

★ **2.** **(a)** On note u_n une grandeur mesurée l'année n, et on sait que cette grandeur augmente de $r\%$ par an.
Donner l'expression du terme général de (u_n), puis déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 2u_0$. (*pour simplifier le résultat, on utilisera l'approximation* $\ln(1+x) \approx x$, *valable pour des petites valeurs de* x).
Ce résultat est connu sous le nom de « règle des 70 » : une grandeur qui augmente de $r\%$ par an doublera tous les $\frac{70}{r}$ ans.

(b) **Application :** if the economic growth is contained around 2%, how long does it take to double it ?
Let u_n be the global wealth produced year n. If the economic growths stays around 2%, compare the total amount of wealth produced between year 0 and year 2000 with the total amount between 2001 and 2035.