Introduction : vecteurs, bases et repères.

Les vecteurs représentent des grandeurs physiques comme des forces, des vitesses, des champs (magnétiques, gravitationnels ...), qui ont nécessité la mise en place des repères.

I. Vecteurs.

Un vecteur traduit un déplacement, il est caractérisé par 3 éléments : sa direction, son sens, et sa longueur.

Exemple : Si A et B sont deux points distincts, on peut former un vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec pour caractéristiques : la direction de la droite (AB), le sens de A vers B, et la longueur AB.
La longueur d'un vecteur est aussi appelée sa ***norme***, et on peut noter $\|\overrightarrow{u}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Relation de Chasles : $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Définitions.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si :
$\star$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.
OU $\star$ il existe deux réels α et β non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.
Autrement dit, soit l'un des deux vecteurs est nul, soit ils ont la même direction.

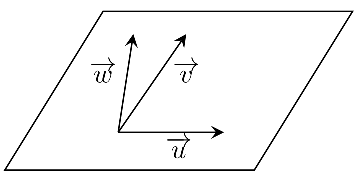
Exemples :

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur, en effet : ...

Définition.

Dans l'espace, trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** si et seulement si :
$\star$ il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}+k'\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{w}+k'\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{w}=k\overrightarrow{u}+k'\overrightarrow{v}$.
OU $\star$ il existe trois réels α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.

Illustration :



Définition (complément).

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas colinéaires, autrement dit : ....
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace forment une ***famille libre*** si et seulement si ils ne sont pas coplanaires : ....

Remarque : une famille qui n'est pas libre est dite ***liée***.

II. Bases et repères

1) Bases, orientation

Définition.

Une ***base*** du plan $\mathcal{P}$ est un couple de deux vecteurs non colinéaires.
Dans l'espace $\mathcal{E}$, une ***base*** est un triplet de trois vecteurs non coplanaires.
En général une base du plan est notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et une base de l'espace $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Théorème.

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ étant une base du plan $\mathcal{P}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$.
Le couple (x, y) est unique et est appelé ***couple de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\star$ $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ étant une base de l'espace $\mathcal{E}$, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ s'écrit comme ***combinaison linéaire*** de $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$, c'est-à-dire qu'il existe trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$.
Le triplet (x, y, z) est unique et est appelé ***triplet de coordonnées cartésiennes*** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$: on note en général $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Orientation. Le plan est en général orienté suivant le sens trigonométrique (sens anti-horaire).
Dans l'espace, on peut orienter un plan $\mathcal{P}$ suivant un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui n'est pas dans le plan : le vecteur $\overrightarrow{u}$ pointe vers le demi-espace d'observation de $\mathcal{P}$, et vu de ce demi-espace, on oriente $\mathcal{P}$ dans le sens trigonométrique.

Différents types de bases :

- $\star$ La base du plan est dite ***orthogonale*** si la mesure principale de l'angle non orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est $\frac{\pi}{2}$.
  Dans l'espace, les trois angles non orientés $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k})$ doivent mesurer $\frac{\pi}{2}$.
- $\star$ La base est dite ***orthonormale*** (ou ***orthonormée***) si elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont de norme 1.
- $\star$ La base est dite ***directe*** si la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (orienté par $\overrightarrow{k}$ dans l'espace) est positive (autrement dit, une mesure de l'angle orienté est entre 0 et π).

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base du plan, les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base du plan car ....
On note $\mathcal{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\imath}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Repères

Définition.
Un ***repère cartésien*** est la donnée d'un point et d'une base.
Un repère est qualifié de direct, orthogonal, orthonormal … si sa base l'est.

Définition.
Soit $\mathcal{R}$ un repère du plan (resp. de l'espace) $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$).
Les ***coordonnées cartésiennes*** d'un point M dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (respectivement $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) :
⋆ si M est un point du plan, M a pour coordonnées (x, y) signifie que $\overrightarrow{OM} = \ldots$
⋆ si M est un point de l'espace, M a pour coordonnées (x, y, z) signifie que $\overrightarrow{OM} = \ldots$

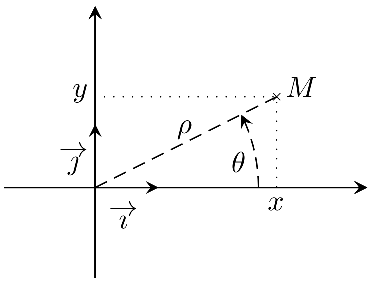
Remarques :
- L'existence et l'unicité de ces coordonnées sont assurées par le théorème précédent.
- On peut ainsi identifier un point du plan à ses coordonnées dans $\mathbb{R}^2$, autrement dit il existe une ***bijection*** entre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}^2$ (de même, il y a une ***bijection*** entre $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}^3$).

3) D'autres types de coordonnées

a. coordonnées polaires dans le plan

Définition.
Soit $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal direct.
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan non nul, on note $\rho = \|\overrightarrow{u}\|$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u})$.
  Alors (ρ, θ) est le couple de ***coordonnées polaires*** de $\overrightarrow{u}$.
- Soit M un point du plan distinct de O, on note $\rho = OM$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
  Alors (ρ, θ) est le couple de ***coordonnées polaires*** de M.

Dans les deux cas, ρ est appelé ***rayon polaire*** et θ ***angle polaire***.



Propriété.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Soit M un point distinct de O (ou $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul) de coordonnées cartésiennes x et y dans $\mathcal{R}$, et de coordonnées polaires (ρ, θ). Alors
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Exemple : déterminons les coordonnées polaires de A qui a pour coordonnées cartésiennes : -2 et $2\sqrt{3}$.

b. coordonnées cylindriques dans l'espace

Définition.

Soient $\mathcal{R}$ un repère orthonormal direct de l'espace, et M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). On note N le projeté orthogonal de M dans le plan (xOy), et (ρ, θ) les coordonnées polaires de N. Alors le triplet (ρ, θ, z) est le triplet des ***coordonnées cylindriques*** de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Exemple : dans un repère $\mathcal{R}$, le point M a pour coordonnées cylindriques $(3, -\frac{\pi}{4}, -2)$, quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

Méthode : pour passer des coordonnées cartésiennes aux cylindriques ou le contraire, on garde le même z, et on procède comme pour les polaires sur les deux premières coordonnées.

III. Utilisation des coordonnées

Propriété.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B), et soit k dans $\mathbb{R}$.

- Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Même chose dans l'espace avec trois coordonnées.

Théorème.

Dans un repère <u>orthonormé</u> , la ***norme*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, qui correspond à la distance AB est donnée par la formule :

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ dans le plan ;

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ dans l'espace.

Illustration :

Exemple : soient $A(3; -1)$ et $B(2; 5)$ dans un repère orthonormé, on note I le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} =$ et $\|\overrightarrow{AB}\| =$ et $-2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$

les coordonnées de I sont ....