Généralités sur les suites numériques.

Exercice 1.

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \cos(n\pi)$.
Étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Que peut-on en déduire ?

2. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.
Étudier les suites extraites (v_{4n}), (v_{4n+1}), v_{4n+2} et v_{4n+3}.

3. On appelle (w_n) la suite $w_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
Étudier les suites extraites (w_{3n}), (w_{3n+1}) et (w_{3n+2}).

Exercice 2.

Les suites (u_n) sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + (n-1)^2$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2n^2 - 4n + 2$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{-2n+1}$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5\frac{n}{n+1}$

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \frac{1}{n^2+1}$

Exercice 3.

Étudier la monotonie des suites suivantes :

1. $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$

2. $u_n = \dfrac{3^n}{5^{n+2}}$

3. $u_n = \frac{n+1}{n}$

4. $u_n = 2 \times 4^n - 5$

5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

6. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

Exercice 4.

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 5. Sens de variation par récurrence.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 7$.

- **(a)** La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, calculer v_1, v_2 et v_3.
- **(b)** Montrer par récurrence que (v_n) est croissante.
- **(c)** Montrer par récurrence que la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ est décroissante.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$.

- **(a)** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x + 1$.
- **(b)** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$ et que (u_n) et croissante.
- **(c)** Écrire une fonction Python `suite(n)` qui permet de calculer le terme de rang n de la suite u.

Exercice 6.

Reconnaître le type de suite puis calculer son terme général et la somme de ses $n+1$ premiers termes :

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n$

2. $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - 4$

3. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} = u_n$

4. $u_2 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = -\sqrt{3}\,u_n$

5. $u_1 = 10$ et $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} - u_n = 3$

6. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+1} - 2u_n = 0$

Exercice 7.

1. La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_4 = 3$ et de raison -2.

(a) Donner le terme général de (u_n).

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} u_k$ et $\displaystyle\sum_{n=3}^{22} u_n$.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, et $v_1 = 6$.

(a) Donner le terme général de la suite (v_n) ainsi que v_0.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ pour $n > 0$ et $\displaystyle\sum_{p=4}^{11} v_p$.

Exercice 8.

Lors de la crise économique de 2008, on estime qu'entre fin juillet et décembre, le prix du baril de pétrole a baissé d'en moyenne 1% par jour. Sachant qu'il était d'environ 120 euros le 31 juillet, à partir de quel jour valait-il moins de 100 euros ?
Écrire un programme Python permettant de retrouver ce résultat.

Exercice 9.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n > 0$.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout n.
Justifier que (v_n) est bien définie et montrer qu'elle est arithmétique.

4. En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2 \times 5^n$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{5^n}$ est arithmétique.

2. En déduire en fonction de n, l'expression de v_n, puis celle de u_n.

Exercice 11.

Soient u et v les suites définies pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$. Montrer que t et s sont deux suites géométriques.

2. Exprimer t_n et s_n en fonction de n.

3. En déduire les termes généraux de (u_n) et (v_n).

* Exercice 12.

Les suites ci-dessous sont-elles bien définies ?

(a) $u_0 = \frac{13}{8}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$

(b) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e \times u_n)$.