# Généralités sur les nombres complexes.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

## Exercice 1.

Calculer $i^9$, puis $i^{31}$, puis $(3i)^6$ et enfin $(-5i)^9$.

## ★ Exercice 2.

Soit $z = a + ib$, on suppose $z \neq 0$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

## ☞ Exercice 3.

Mettre sous forme algébrique :

**(a)** $z = i^3(3i - 2)$ **(b)** $z = \dfrac{i+5}{(3+2i)^2}$ **(c)** $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$

## Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (mettre le résultat sous forme algébrique) : $2z + 2i = iz \quad ; \quad 3z + 7 = 5\overline{z} - 2i$.

## Exercice 5.

Soient les points $A(1 + 2i)$, $B(4 + i)$ et $C(5 + 3i)$.
Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

## Exercice 6.

Soient $A$, $B$ et $C$ des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2 - i$, $z_B = 1$ et $z_C = 4 - 3i$. $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?

## Exercice 7.

Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes $z_A = -1 - 3i$ ; $z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$.

**1.** Que peut-on dire du triangle $ABC$ ?

**2.** On note $D$ le symétrique de $A$ par rapport à l'axe des abscisses.
Déterminer la nature des triangles $BCD$ et $ACD$.

## ★ Exercice 8. Identité du parallélogramme.

Démontrer que pour tous $z$ et $z'$ de $\mathbb{C}$, $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.
Quel est le rapport avec un parallélogramme ?

## ☞ Exercice 9.

Mettre sous forme exponentielle :

**(a)** $z = -11$

**(b)** $z = 2i$

**(c)** $z = 1 + i$

**(d)** $z = (1 + i)^{2025}$

**(e)** $z = \dfrac{1-i}{-\sqrt{3}-i}$

**(f)** $z = \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

**(g)** $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**(h)** $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$

## Exercice 10.

Pour chacun des nombres complexes suivants, le placer approximativement dans le plan complexe, puis déterminer le module, et un argument (en radian) en utilisant la fonction arctangente.

**1.** Avec la touche arctan de la calculatrice, on cherche une valeur approchée d'un argument :
$z_1 = 2 - 3i \qquad z_2 = -1 + 7i \qquad z_3 = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}i$

**2.** On cherche une valeur exacte d'un argument de $z_4 = \sqrt{2} + 1 + i$ et $z_5 = -1 + (\sqrt{3} - 2)i$
en utilisant les valeurs suivantes : $\arctan\left(\sqrt{2} - 1\right) = \dfrac{\pi}{8}$ et $\arctan\left(2 - \sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.

## Exercise 11.

Let $z$ be the complex number $z = (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})$.

**1.** Write $z^2$ in the algebraic form.

**2.** Determine the modulus and an argument of $z^2$.
Use them to write $z$ in the trigonometric form.

## Exercice 12.

Donner la forme exponentielle de $z_1 = 2(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$ et $z_2 = i(\cos(-\theta) + i\sin(\theta))$.

## ★ Exercice 13.

Soient $a$ et $b$ des nombres réels.

**1.** Écrire la forme algébrique de $e^{i(a+b)}$.

**2.** Écrire la forme algébrique de $e^{ia}e^{ib}$.

**3.** Utiliser les deux questions précédentes pour retrouver les deux formules de trigonométrie donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

## Exercice 14.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et représenter les solutions dans le plan complexe.

**(a)** $e^z = -4$ **(b)** $e^z = 7 - 7i$ **(c)** $e^z = 2i$