Généralités sur les fonctions, structure.

Les fonctions ont été introduites en mathématiques vers la fin du XVII$^{\text{è}}$ siècle par Leibniz, puis ont été développées entre autres par Euler, Cauchy ... La définition a évolué au fil du temps, et l'étude des fonctions forme le domaine de l'*analyse*.

Définition, vocabulaire et notation.

- Une ***fonction*** f est définie par la donnée de deux éléments :
  - ⋆ un procédé pour déterminer une image (en général un calcul à faire) ;
  - ⋆ l'ensemble des nombres pour lesquels on peut appliquer ce procédé, c'est l'***ensemble de définition***, noté en général $\mathcal{D}_f$.
- On pourra utiliser la notation suivante : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
- $f(x)$ est ***l'image*** du réel x par la fonction f.
  Soit y dans $\mathbb{R}$, si il existe un réel x dans $\mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est ***un antécédent*** de y par f.

Exemples :

⋆ la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

L'image de -1 par f est ....

7 a pour antécédents .... car

⋆ la fonction g dont l'expression est $g(x) = \frac{2}{x-4}$ est définie sur $\mathcal{D}_g =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ car diviser deux nombres est toujours possible sauf lorsque le diviseur est nul, et ici $x - 4$ s'annule lorsque $x = 4$.

I. Rappels sur les intervalles

• **Un intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux valeurs.

Par exemple $x \in [-\frac{3}{7}; 7{,}4[$ signifie ......x...... : $\longrightarrow$

$]-\infty; 3]$ est l'ensemble des nombres .... : $\longrightarrow$

⋆ L'intervalle $[a; b]$ est dit ***fermé*** car ses ***bornes*** a et b sont comprises dans l'intervalle.
On l'appelle aussi un ***segment***. a ... $[a, b]$ se lit « a appartient au segment $[a, b]$ ».

⋆ L'intervalle $]a; b[$ est dit ***ouvert*** car ses bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle : a......$]a; b[$, b......$]a; b[$.

• **Intersection et réunion :**

Si I et J sont deux ensembles de nombres, l'***intersection*** de I et J est l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans I et dans J, on le note $I \cap J$. « I inter J »

La ***réunion*** de I et de J, notée $I \cup J$ (« I union J »), est l'ensemble des nombres qui sont dans I, ou dans J ou dans les deux à la fois.

$I = [3; 7]$ et $J =]-2; 4[$: $\longrightarrow$

• **Notation $\mathbb{R}$:** on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$.

Alors $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ peut se noter $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (« $\mathbb{R}$ privé de 0 ») ou $\mathbb{R}^*$ (« $\mathbb{R}$ étoile »).

De même, $]-\infty; -4[\cup]-4; 3[\cup]3; +\infty[$ se note $\mathbb{R}\backslash\{-4; 3\}$ et se lit « ensemble des nombres réels, privé de -4 et 3 ».

On note également $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ « ...

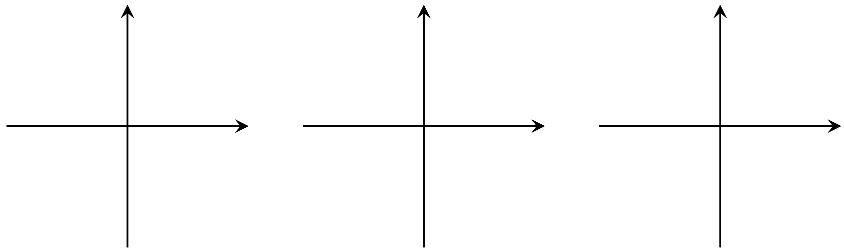
$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, « .

II. Fonctions usuelles connues

fonctions de référence :

- ⋆ puissances :

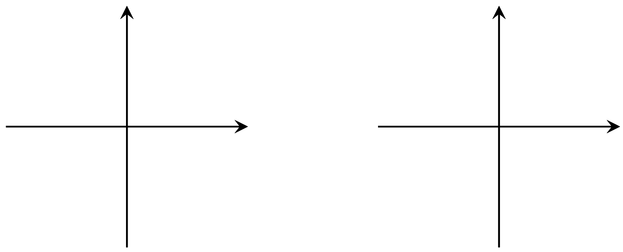
  ....



Rappel : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

- ⋆ inverses de puissances :

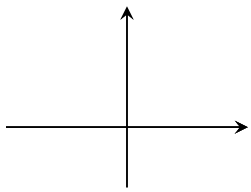
  ....



Rappel : $x^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}}$

- ⋆ racine carrée :

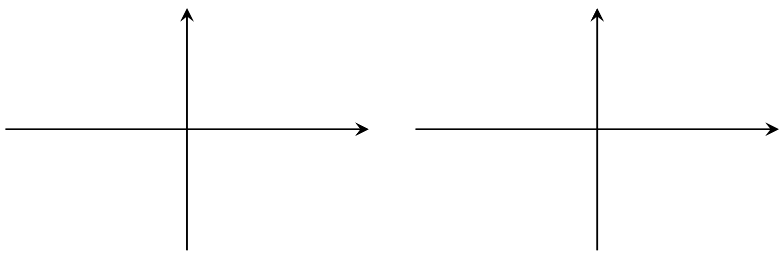
  ....



Rappels : si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$ et si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$

- ⋆ cosinus et sinus :

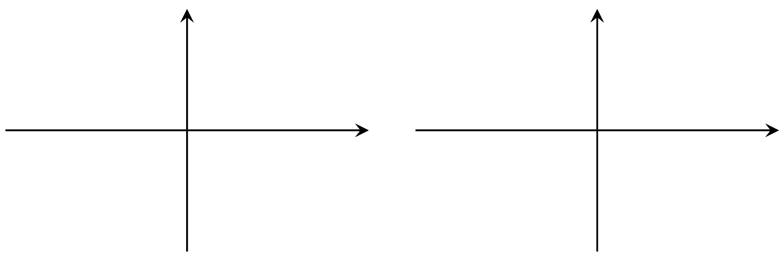
  ....



- ⋆ logarithme et exponentielle :

  ....

  ....



grandes familles de fonctions usuelles :

- ⋆ polynômes : ....

  ....

- ⋆ fractions rationnelles : ....

  ....

  ....

III. Construction de nouvelles fonctions

1) Opérations usuelles

On peut former de nouvelles fonctions en ajoutant, soustrayant ... des fonctions usuelles. Par exemple, $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ est la somme de la fonction carré et de la fonction inverse.

Définition.

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$, on appelle :

- ***somme*** de u et v la fonction $u + v : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) + v(x) \end{array}$.
- ***soustraction*** de u par v la fonction $u - v : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) - v(x) \end{array}$.
- ***produit*** de u et v la fonction $uv : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) \times v(x) \end{array}$.
- ***quotient*** de u par v la fonction $\dfrac{u}{v} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{u(x)}{v(x)} \end{array}$ avec $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u \cap \{x \in \mathcal{D}_v \,|\, v(x) \neq 0\}$.

Exemples :

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$:

- $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$:

2) Composition de fonctions

Définition.

Soient u et v deux fonctions.
On appelle ***composée de** u **par*** v la fonction notée $v \circ u$ d'expression $v \circ u(x) = v(u(x))$.
Elle est définie pour tous les x de $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathcal{D}_v$: $\mathcal{D}_{v \circ u} = \{x \in \mathcal{D}_u \,|\, u(x) \in \mathcal{D}_v\}$.

Exemples :

- $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & 2x-7 & \mapsto & e^{2x-7} \\ & & X & \mapsto & e^X \end{array}$$

- $u(x) = 2x - 7$ et $w(x) = \dfrac{1}{x}$: déterminer les ensembles de définition et les expressions de $u \circ w$ et $w \circ u$.

- décomposer les fonctions suivantes en deux fonctions usuelles.
  - ⋆ $f(x) = \ln(x^2 + 3)$
  - ⋆ $g(x) = \dfrac{1}{-3x + 5}$
  - ⋆ $h(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 2$

Remarque importante : même si $u \circ v$ et $v \circ u$ existent toutes les deux, elles ne sont pas égales.

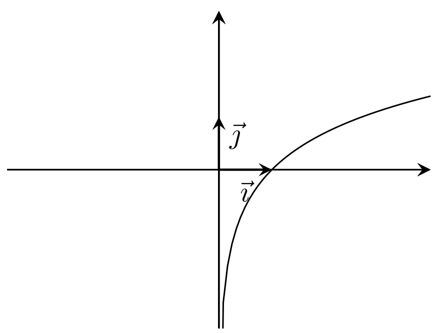
3) Quelques cas particuliers

Propriété.

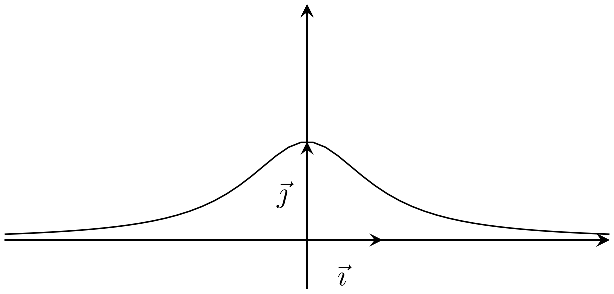
Soit a un nombre non nul.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto af(x)$, il faut multiplier les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par a.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(ax)$, il faut diviser les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ par a.

Exemples :

1. Voilà ci-contre le graphique de la fonction ln.
Tracer dans le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \ln(x + 3)$ (en bleu) et $x \mapsto \ln(x) + 2$ (en rouge).



2.



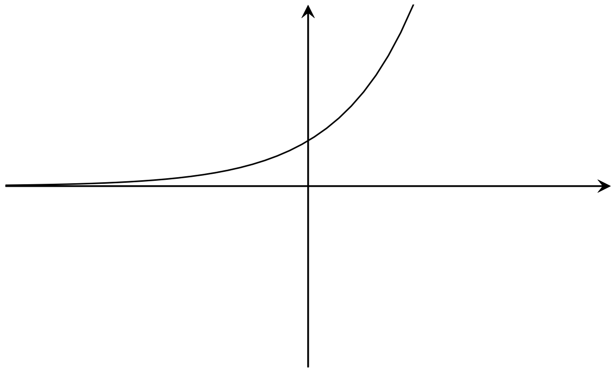
Ci-contre est représentée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
Tracer sur le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(3x)^2+1}$ (en bleu) et $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ (en rouge).

3. La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est ....

....

La courbe de $x \mapsto -e^{x}$ est ....

....



IV. Déterminer les ensembles de définition

1) Méthode

1. Mettre en évidence la structure de la fonction : opérations et fonctions usuelles qui interviennent, nommer ces fonctions :

$$\text{par exemple, « } f = \frac{f_1 \times f_2}{f_3} \textit{ avec } f_1(x) = \dots, f_2(x) = \dots \textit{ et } f_3(x) = \dots \text{ »}$$

2. Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions et les conditions induites par les opérations :

- formes $u + v$ ou $u - v$ ou $u \times v$: $\star$ $\mathcal{D}_u = \dots$
  $\star$ $\mathcal{D}_v = \dots$
- forme $\frac{u}{v}$: $\star$ $\mathcal{D}_u = \dots$
  $\star$ $\mathcal{D}_v = \dots$
  $\star$ $v(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \dots$

  penser au raccourci fractions rationnelles
- forme $v \circ u$: ($\star$ $\mathcal{D}_v = \dots$ *ne sert pas dans l'ensemble final, juste pour la 3ème* $\star$)
  $\star$ $\mathcal{D}_u = \dots$
  $\star$ $u(x) \in \mathcal{D}_v \Longleftrightarrow \dots$

3. Conclure en tenant compte de toutes les restrictions : « *Donc* $\boxed{\mathcal{D}_f = \dots}$. »

Application à l'exemple : pour $f = \frac{f_1 \times f_2}{f_3}$, cela donnerait :

$\star$ $\mathcal{D}_{f_1} = \dots$

$\star$ $\mathcal{D}_{f_2} = \dots$

$\star$ $\mathcal{D}_{f_3} = \dots$

$\star$ $f_3(x) = 0 \Longleftrightarrow \dots$

Donc $\boxed{D_f = \dots}$.

$\mathcal{D}_{v \circ u}$ peut sembler n'avoir aucun rapport avec $\mathcal{D}_u$ ni $\mathcal{D}_v$

2) Exemples

- $f(x) = \dfrac{(3x^2+2)\sqrt{x}}{\ln(x)}$