Généralités sur les fonctions, structure.

Les fonctions ont été introduites en mathématiques vers la fin du XVII$^{\text{è}}$ siècle par Leibniz, puis ont été développées entre autres par Euler, Cauchy ... La définition a évolué au fil du temps, et l'étude des fonctions forme le domaine de l'*analyse*.

Une fonction f est définie par la donnée de deux éléments :
⋆ un procédé pour déterminer une image (en général un calcul à faire) ;
⋆ l'ensemble des nombres pour lesquels on peut appliquer ce procédé, c'est l'***ensemble de définition***, noté en général $\mathcal{D}_f$.

Exemple : la fonction f dont l'expression est $f(x) = \frac{2}{x-4}$ est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ car diviser deux nombres est toujours possible sauf lorsque le diviseur est nul, et ici $x-4$ s'annule lorsque $x = 4$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : $f(x) = \frac{2}{x-4}$ se note aussi $f : x \mapsto \frac{2}{x-4}$.
On dit « f est la fonction qui à x associe $\frac{2}{x-4}$ » ou « par la fonction f, x a pour image $\frac{2}{x-4}$ ».

I. Rappels sur les intervalles

• **Un intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux valeurs.

Par exemple $x \in [-\frac{3}{7}; 7{,}4[$ signifie ......x...... :

$]-\infty; 3]$ est l'ensemble des nombres .... :

⋆ L'intervalle $[a; b]$ est dit ***fermé*** car ses ***bornes*** a et b sont comprises dans l'intervalle.
On l'appelle aussi un ***segment***. a ... $[a, b]$ se lit « a appartient au segment $[a, b]$ ».
⋆ L'intervalle $]a; b[$ est dit ***ouvert*** car ses bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle : a......$]a; b[$, b......$]a; b[$.

Propriété de caractérisation des intervalles.

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, alors $[a, b] \subset I$.

• **Intersection et réunion :**
Si I et J sont deux ensembles de nombres, l'***intersection*** de I et J est l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans I et dans J, on le note $I \cap J$. « I inter J »
La ***réunion*** de I et de J, notée $I \cup J$ (« I union J »), est l'ensemble des nombres qui sont dans I, ou dans J ou dans les deux à la fois.
$I = [3; 7]$ et $J =]-2; 4[$:

• **Notation** $\mathbb{R}$ **:** on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$.
Alors $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ peut se noter $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (« $\mathbb{R}$ privé de 0 ») ou $\mathbb{R}^*$ (« $\mathbb{R}$ étoile »).
De même, $]-\infty; -4[\cup]-4; 3[\cup]3; +\infty[$ se note $\mathbb{R}\backslash\{-4; 3\}$ et se lit « ensemble des nombres réels, privé de -4 et 3 ».
On note également $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ « ...

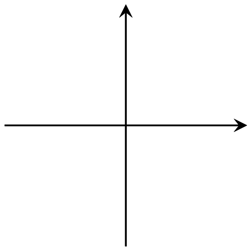
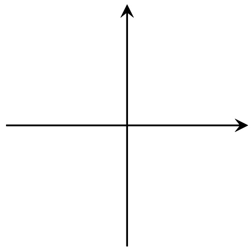
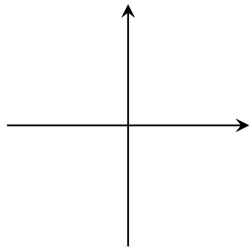
$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, « .

II. Fonctions usuelles connues

fonctions de référence :

⋆ puissances :

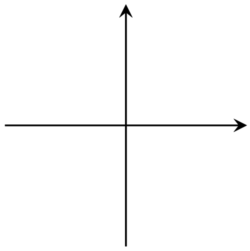
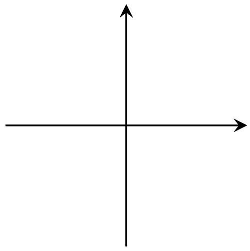
. . . .

Rappel : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

⋆ inverses de puissances :

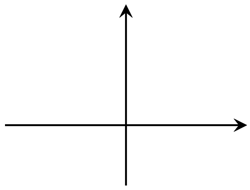
. . . .

Rappel : $x^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}}$

⋆ racine carrée :

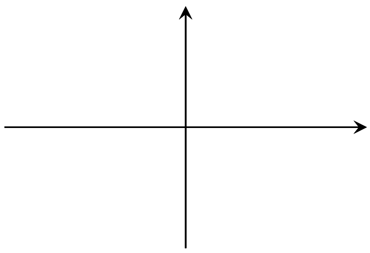
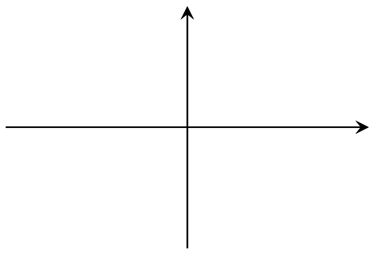
. . . .



Rappels : si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$ et si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$

⋆ cosinus et sinus :

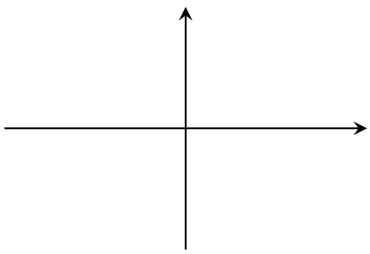
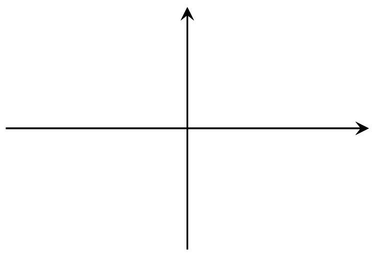
. . . .

⋆ logarithme et exponentielle :

. . . .

. . . .

grandes familles de fonctions usuelles :

⋆ polynômes : . . . .

. . . .

⋆ fractions rationnelles : . . . .

. . . .

. . . .

III. Structure d'une fonction

1) Addition, soustraction, produit, division de fonctions

On peut former de nouvelles fonctions en ajoutant, soustrayant ... des fonctions usuelles. Par exemple, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ est la somme de la fonction carré et de la fonction inverse.
De même, la fonction $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$ est ...

On note $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$ les ensembles de définition des fonctions u et v.
Les fonctions $u+v$, $u-v$ et $u \times v$ sont définies ....
.... autrement dit ....
La fonction $\frac{u}{v}$ est définie ....
.... autrement dit ....

Exemples :

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

- $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$

2) Composition de fonctions

Définition.

Soient u et v deux fonctions.
On appelle ***composée de** u **par** v* la fonction notée $v \circ u$ d'expression $v \circ u(x) = v(u(x))$.
Elle est définie pour tous les x de $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathcal{D}_v$: $\mathcal{D}_{v \circ u} = \{x \in \mathcal{D}_u \,|\, u(x) \in \mathcal{D}_v\}$.

Exemples :

- $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & 2x-7 & \mapsto & e^{2x-7} \\ & & X & \mapsto & e^X \end{array}$$

- $u(x) = 2x - 7$ et $w(x) = \dfrac{1}{x}$: déterminer les ensembles de définition et les expressions de $u \circ w$ et $w \circ u$.

- décomposer les fonctions suivantes en deux fonctions usuelles.
  - ⋆ $f(x) = \ln(x^2 + 3)$
  - ⋆ $g(x) = \dfrac{1}{-3x + 5}$
  - ⋆ $h(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 2$

Remarque importante : même si $u \circ v$ et $v \circ u$ existent toutes les deux, elles ne sont pas égales.

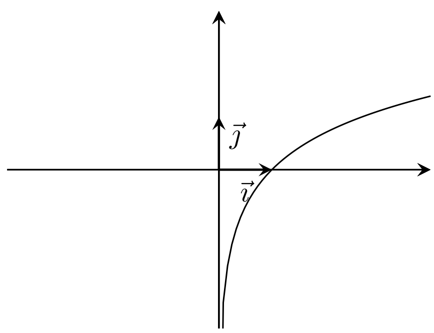
3) Cas particuliers d'opérations et compositions

Propriété.

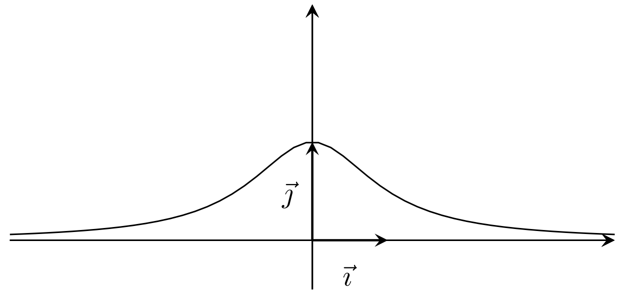
Soit a un nombre non nul.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto af(x)$, il faut multiplier les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par a.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(ax)$, il faut diviser les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ par a.

Exemples :

1. Voilà ci-contre le graphique de la fonction ln.
Tracer dans le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \ln(x + 3)$ (en bleu) et $x \mapsto \ln(x) + 2$ (en rouge).



2.



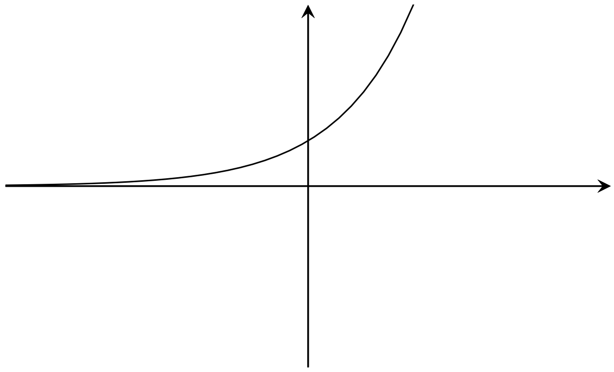
Ci-contre est représentée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
Tracer sur le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(3x)^2+1}$ (en bleu) et $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ (en rouge).

3. La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est ....

....

La courbe de $x \mapsto -e^{x}$ est ....

....



IV. Méthode pour déterminer les ensembles de définition

1. Identifier la structure (opération, composition ...) de la fonction, et les fonctions de référence qui interviennent (notées ici u et v).

2. ➤ $u+v$ ou $u-v$ ou $u \times v$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et prendre l'intersection.

➤ $\dfrac{u}{v}$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et résoudre $v(x)=0$
puis prendre l'intersection des trois ensembles obtenus.

➤ $v \circ u$: déterminer $\mathcal{D}_u$ et résoudre $u(x) \in \mathcal{D}_v$
prendre l'intersection des deux ensembles obtenus.
$\mathcal{D}_{v\circ u}$ peut sembler n'avoir aucun rapport avec $\mathcal{D}_u$ ni $\mathcal{D}_v$.

Exemples :
- $f(x) = \ln(x^2+3)$