Généralités sur les nombres complexes.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Calculer i^9, puis i^{31}, puis $(3i)^6$ et enfin $(-5i)^9$.

★ Exercice 2.

Soit $z = a + ib$, on suppose $z \neq 0$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

☞ Exercice 3.

Mettre sous forme algébrique :

(a) $z = i^3(3i-2)$ **(b)** $z = \dfrac{i+5}{(3+2i)^2}$ **(c)** $z = \dfrac{1-3i}{1+3i}$

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (mettre le résultat sous forme algébrique) : $2z + 2i = iz \quad ; \quad 3z + 7 = 5\overline{z} - 2i$.

Exercice 5.

Soient les points $A(1+2i)$, $B(4+i)$ et $C(5+3i)$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

★ Exercice 6. Identité du parallélogramme.

Démontrer que pour tous z et z' de $\mathbb{C}$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.
Quel est le rapport avec un parallélogramme ?

☞ Exercice 7.

Mettre sous forme exponentielle :

(a) $z = -11$
(b) $z = 2i$
(c) $z = 1+i$
(d) $z = (1+i)^{2022}$
(e) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}$
(f) $z = \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$
(g) $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
(h) $z = -10e^{i\pi}\left(\dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$

Exercice 8.

Pour chacun des nombres complexes suivants, le placer approximativement dans le plan complexe, puis déterminer le module, et une mesure approchée d'un argument (en radian) en utilisant la fonction arctangente et toutes les précautions nécessaires.

1. Avec la touche arctan de la calculatrice : $z_1 = 2-3i \qquad z_2 = -1+7i \qquad z_3 = 1-\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

2. En utilisant les valeurs exactes : $\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{\pi}{8}$ et $\arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{12}$:
$z_4 = \sqrt{2}+1+i \qquad z_5 = -1+(\sqrt{3}-2)i$

Exercise 9.

Let z be the complex number $z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$.

1. Write z^2 in the algeabraic form.

2. Determine the modulus and an argument of z^2.
Use them to write z in the trigonometric form.

Exercice 10.

Donner la forme exponentielle de $z_1 = 2(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$ et $z_2 = i(\cos(-\theta) + i\sin(\theta))$.

Exercice 11.

Soient A, B et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2-i$, $z_B = 1$ et $z_C = 4-3i$.
A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 12.

Résoudre $|z-1| = |z-i|$ et interpréter géométriquement.

★ Exercice 13.

Soient a et b des nombres réels.

1. Écrire la forme algébrique de $e^{i(a+b)}$.

2. Écrire la forme algébrique de $e^{ia}e^{ib}$.

3. Utiliser les deux questions précédentes pour retrouver les deux formules de trigonométrie donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 14.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et représenter les solutions dans le plan complexe.

(a) $e^z = -4$ **(b)** $e^z = 7-7i$ **(c)** $e^z = 2i$