Généralités.

On rappelle que i désigne un nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$.
Ce nombre n'est pas un nombre réel, car l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle. Cela explique la notation i comme « imaginaire ».

La première apparition d'une « racine carrée de nombre négatif » semble se situer au 16ème siècle, dans les travaux de Cardan (1501-1576). Bien que ces nombres soient impossibles à concevoir dans l'univers réel, il était possible de les manipuler dans des calculs, sans aucune contradiction avec les règles usuelles. C'est Descartes (1596 - 1650) qui leur donne leur appellation d'« imaginaires » en 1637. Après plusieurs siècles de manipulation de l'écriture inconfortable « $\sqrt{-1}$ », Euler introduit finalement la notation « i », popularisée par Gauss (1777 - 1855). Au 19ème siècle, Fresnel (1788 - 1827) et Kennelly (1861 - 1939) montrent l'utilité des nombres complexes pour résoudre des problèmes de physique (optique, électricité).

I. Nombres complexes : forme algébrique

Définition.

Un ***nombre complexe*** est un nombre z qui s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ est l'ensemble de tous les nombres complexes que l'on peut former lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{C} = \{a + ib,\ a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Théorème.

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$, et tous a' et b' de $\mathbb{R}$:

$$a + ib = a' + ib' \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Autrement dit, pour tout nombre complexe z, le couple de réels (a, b) tel que $z = a+ib$ est unique, on peut donc donner la définition suivante :

Définition.

Dans l'écriture $z = a + ib$, a est appelée la ***partie réelle***, on note $a = \mathrm{Re}\,(z)$
b est la ***partie imaginaire*** : $b = \mathrm{Im}\,(z)$.
La forme $z = a + ib$ est ***la forme algébrique***.

Cas particuliers :

- ⋆ si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$ et il est qualifié d'***imaginaire pur*** : l'ensemble des nombres imaginaires purs se note parfois $i\mathbb{R}$.
- ⋆ si $b = 0$, alors le nombre est réel (par exemple : $7 + 0i = 7$), ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1) Calculs avec les nombres complexes

Les opérations sur les nombres réels (addition, soustraction, multiplication, division par un nombre non nul) restent valables dans $\mathbb{C}$, avec les mêmes propriétés de priorité, commutativité, associativité et distributivité que dans $\mathbb{R}$. La règle du produit nul reste également valable.
Le résultat d'une de ces opérations peut toujours se mettre sous forme algébrique $a + ib$.

Par exemple, $3 - 2i + 5 + 12i =$ .... et $(3 - 2i)(5 + 12i) =$ ....
$= \dots$

Notation : attention, lors de l'utilisation en physique, on note parfois j au lieu de i (pour éviter la confusion avec l'intensité). Mais en maths, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce nombre particulier est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

En effet : ....

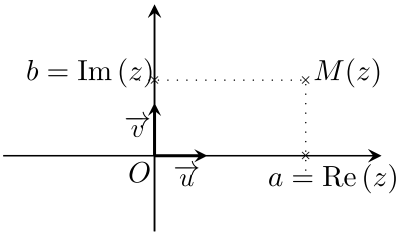
2) Plan complexe

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

a. Points.

Définition.

À tout nombre complexe z sous forme algébrique $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}$.
Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que M est le ***point image*** de z dans le plan, et est noté $M(z)$ et z est l'***affixe*** du point M.



Remarques :

- Un plan où l'on représente des nombres complexes est appelé ***plan complexe***.
- Pour $z \in \mathbb{C}$: $z \in \mathbb{R}$ signifie ....

  et $z \in i\mathbb{R}$ signifie ....
- si z_A et z_B sont les affixes des points A et B, alors l'affixe du milieu du segment $[AB]$ est ....

b. Vecteurs.

On peut aussi associer un nombre complexe à un vecteur : $z = a + ib$ correspond au vecteur $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.
Alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ (avec z_A et z_B les affixes respectives des points A et B).
- Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2 :
  - ⋆ $\lambda\overrightarrow{v_1}$ aura pour affixe λz_1;
  - ⋆ $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ aura pour affixe $z_1 + z_2$;
  - ⋆ $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

Exemple : les points $A(-2 + 4i)$, $B(2 + 2i)$ et $C(4 + i)$ sont-ils alignés ?

3) Nombre complexe conjugué

Définition.

On appelle ***conjugué*** d'un nombre complexe $z = a + ib$ le nombre complexe noté $\overline{z}$ (« z barre ») défini par $\overline{z} = a - ib$.

Dans le plan complexe, les images de z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemples : $z_1 = 3 + 4i$ $\quad$ $z_2 = -2 + \frac{i}{2}$ $\quad$ $z_3 = 5i - 11$ $\quad$ $z_4 = \pi - 2i$

$\overline{z_1} =$ $\quad$ $\overline{z_2} =$ $\quad$ $\overline{z_3} =$ $\quad$ $\overline{z_4} =$

$z_1 + z_3 =$	$z_1 \times z_2 =$	$\overline{z_1} \times \overline{z_2} =$

Propriété.

Soient z et z' deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$\overline{(\overline{z})} = \ldots$; $\overline{z+z'} = \ldots\ldots\ldots$; $\overline{z \times z'} = \ldots\ldots$; $\overline{z^n} = \ldots\ldots$ et pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \ldots\ldots$

Remarque : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ se lit « ....

Propriété.

Soit $z = a + ib$, alors $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

En effet,

Application : pour mettre un quotient sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$

Exemple : $\dfrac{2-3i}{1+2i} =$

Propriété.

Soit $z \in \mathbb{C}$: $\quad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z) \qquad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)$

$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

$z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.

En effet,

II. Nombres complexes : forme exponentielle

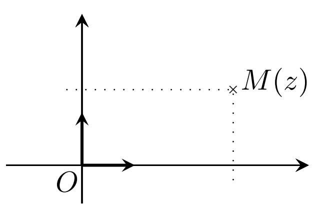
1) Module

Définition.

Soit $z = a + ib$, on appelle ***module de*** z et on note $|z|$ le nombre réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple : $\left|\frac{1}{2} - i\right| = \ldots$

Interprétation géométrique : le module d'un nombre complexe z est la distance entre O et le point M d'affixe z_M : $|z_M| = OM$.
De même, $|z_M - z_A|$ est la distance entre A et M. Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, alors le module de z est la norme du vecteur image : $|z| = \|\overrightarrow{u}\|$.



Propriété.

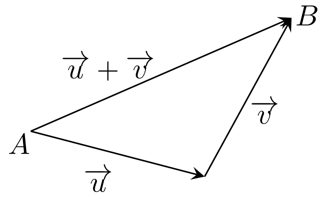
Soient z et z' deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors :
- $|z| = 0$ est équivalent à $z = 0$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$; $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
- (opérations) $|zz'| = |z|\,|z'|$; $|z^n| = |z|^n$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- (inégalité triangulaire) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Illustration de l'inégalité triangulaire : on note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs d'affixes respectives z et z'.
$z + z'$ est l'affixe de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

. . . .

. . . .

« Le plus court chemin de A vers B est la ligne droite. »

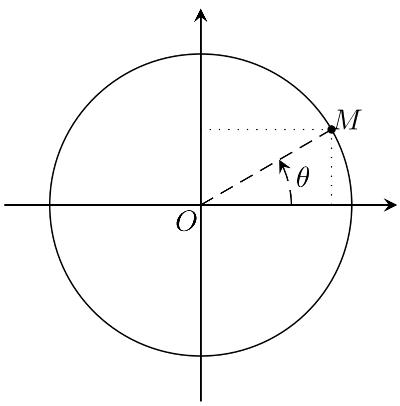


2) Nombres complexes de module 1

Définition.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des points du cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire le cercle trigonométrique.



Soit $M \in \mathbb{U}$, pour repérer M, il suffit d'avoir l'angle θ.

On appelle z l'affixe de M, alors $z =$ . . . .

θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.
On dit que θ est un ***argument*** de z, noté $\arg(z)$.
Et tous les nombres $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des mesures de cet angle. Ainsi, θ est défini à 2π près.

En particulier $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$ et $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ et $\boxed{e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i}$.

Définition.

Soit θ dans $\mathbb{R}$. On note $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$.
Ce nombre complexe est appelé ***exponentielle de*** $i\theta$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}}$.

Exemples : donner la forme algébrique de $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Théorème : relation fondamentale de l'exponentielle complexe.

Pour tous α et β de $\mathbb{R}$: $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

Démonstration avec les formules de trigonométrie. Ce théorème est admis ici.

Propriété.

Pour tous réels θ, θ' et tout entier naturel n :

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- (***formules d'Euler***) $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- (***formule de Moivre***) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ soit $\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Exemple : $z = \dfrac{\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5}$, simplifier l'écriture.

3) Argument et forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul, on note $\rho = |z|$, alors $\rho \neq 0$ et $\frac{z}{\rho}$ est de module 1, en effet, ...
Donc il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{\rho} = e^{i\theta}$, soit $z = \rho e^{i\theta}$.
On en déduit le théorème suivant :

Théorème.

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

ρ est unique, c'est le module de z
θ est unique à 2π près, il est appelé ***argument*** de z, noté $\arg z$.

Définition.

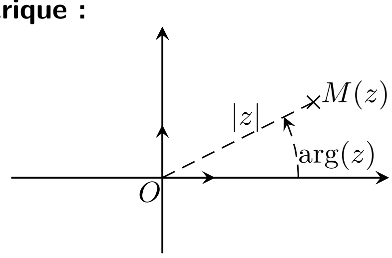
L'écriture $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ est la ***forme exponentielle*** de z.

Remarque : l'argument est donné à 2π près, et pour le signifier, on notera $[2\pi]$ à la fin d'une égalité avec des arguments (« modulo 2π »).

Par exemple, si $z = 3 + 3i$, $\arg(z) =$ ....

On parlera d'***argument principal*** lorsque la mesure de l'angle sera donnée dans $]-\pi, \pi]$. Cet argument principal est, lui, unique pour un nombre complexe donné.

Interprétation géométrique :



Remarque : pour un point M du plan, d'affixe z non nulle avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$: (ρ, θ) est le couple de coordonnées polaires de M.

Méthode pour les changements de forme entre $z = a + ib$ et $z = \rho e^{i\theta}$:

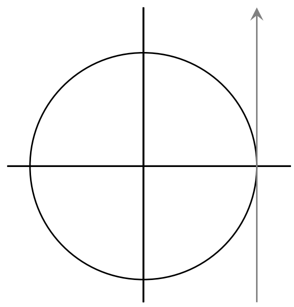
- Obtenir la forme algébrique : $a = \ldots$.
  $b = \ldots$
- Obtenir la forme exponentielle : $\rho =$ ....
  déterminer θ tel que $\cos(\theta) =$ .... et $\sin(\theta) =$ ....

Attention : une forme $\rho e^{i\theta}$ n'est une forme exponentielle que si $\rho > 0$!!

Exemples : écrire les formes algébriques de $z_1 = 3e^{i\pi}$ et $z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$, et les formes exponentielles de $z_3 = 1 - i$, $z_4 = -1 + \sqrt{3}i$ et $z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Remarque : pour trouver θ, on peut aussi remarquer que $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
La fonction arctan permet de donner une valeur d'un angle à partir de sa tangente, mais le résultat est toujours entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on obtient donc l'angle à π près.

Alors, lorsque l'on sait que $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ c'est-à-dire $a > 0$, on peut utiliser la formule $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$.
(si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, alors il faut ajuster : $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ [2\pi]$)



Propriété.

Soient z et z' deux complexes non nuls, alors :
$\arg(z) =$ .... si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ et $\arg(z) =$ .... si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$

$\arg(\overline{z}) =$ .....

$\arg(zz') =$ .... ; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) =$ .... ; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$ ....

Et pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) =$ ....

Attention : $\arg(z) = \frac{1}{n}\arg(z^n)\ \left[\frac{2\pi}{n}\right]$ en particulier, $\arg(z) = \frac{1}{2}\arg(z^2)\ [\pi]$.

Remarque : ces règles de calcul sur l'argument et celles sur le module (ou directement sur l'exponentielle complexe) permettent dans certains cas d'obtenir la forme exponentielle d'un complexe sans passer par la forme algébrique.
Par exemple, $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

Remarque : $\arg\left(z \times e^{i\theta}\right) = \arg(z) + \theta\ [2\pi]$ et $\left|z \times e^{i\theta}\right| = |z|$.
Donc le point d'affixe $z \times e^{i\theta}$ est obtenu par rotation de centre O et d'angle θ du point $M(z)$.

III. Fonction exponentielle complexe

Définition.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe en notation algébrique.
On définit l'***exponentielle complexe*** de z par $e^z = e^a e^{ib}$ (on note aussi $\exp(z)$).

Alors $|e^z| =$ .... ; $\text{Arg}\,(e^z) =$ .... et $\text{Re}\,(e^z) =$ .... ; $\text{Im}\,(e^z) =$ ....

Ainsi, $\boxed{e^z = e^{z'} \text{ si et seulement si } \text{Re}\,(z) = \text{Re}\,(z') \text{ et } \text{Im}\,(z) = \text{Im}\,(z')\ [2\pi]}$.

Méthode : pour résoudre une équation $e^z = a$, on commence par mettre a sous forme exponentielle, puis :

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^{\text{Re}(z)} = |a| \text{ et } \text{Im}\,(z) = \text{Arg}\,(z)\,[2\pi] \\ &\iff \text{Re}\,(z) = \ln(|a|) \text{ et } \text{Im}\,(z) = \text{Arg}\,(z)\,[2\pi] \end{aligned}$$

Et les règles de calcul habituelles de l'exponentielle fonctionnent aussi avec l'exponentielle complexe, notamment $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exercice : résoudre $e^z = 2\sqrt{3} + 2i$.