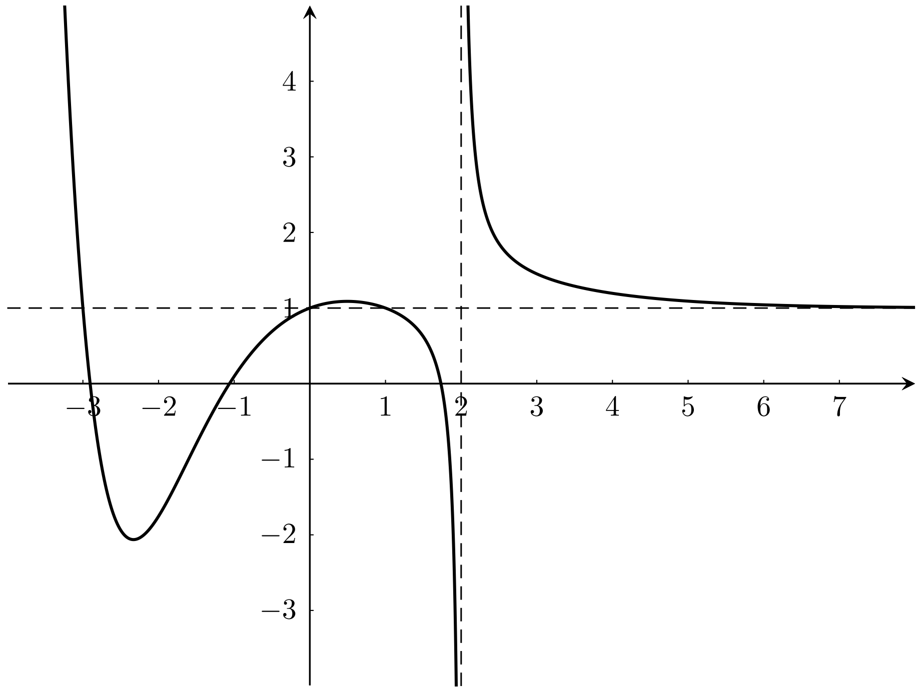
Introduction et calculs sur les fonctions.

1C - Calculs de limites.

I. Introduction

Déterminer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ revient à décrire le comportement de $f(x)$ (axe des ordonnées) lorsque x (axe des abscisses) « se rapproche » de a.



Par exemple, sur la courbe de la fonction f représentée ci-dessus, il semble que :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$: la courbe de f devient infiniment proche de la droite d'équation $y = 1$.

  On dit que la droite d'équation $y = 1$ est ***asymptote horizontale*** à la courbe en $+\infty$.
- $f(x)$ n'a pas de limite en 2, mais $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dots$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dots$.

  On dit que la droite d'équation $x = 2$ est ***asymptote verticale*** à la courbe.

II. Cas général

1) Rappel sur les limites de référence

Ces limites se déduisent de l'observation des courbes des fonctions de référence :

⋆ puissances n, avec $n > 0$: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$ et pour n pair, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ « la limite de x^n lorsque x tend vers $-\infty$ est $+\infty$ »

pour n impair, $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$

⋆ inverses de puissances : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et pour n pair, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

pour n impair, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

⋆ racine carrée : $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

⋆ logarithme : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

⋆ exponentielle : $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

2) Opérations sur les limites

Notations : $\bullet$ peut représenter un nombre fini ou $+\infty$ ou $-\infty$
ℓ et ℓ' sont des nombres finis
FI signifie « forme indéterminée » : c'est une situation où il n'y a pas de réponse générale, il faut traiter au cas par cas. Le résultat pourrait être $-\infty$ ou $+\infty$ ou un nombre fini.

Somme de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ			$+\infty$		$-\infty$
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x)+v(x) =$						

On traite la différence de deux fonctions de la même façon, en utilisant le fait que $u(x)-v(x) = u(x)+(-v(x))$.

Produit de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$		0	$+\infty$	
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x)\times v(x) =$						

Inverse d'une fonction

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} =$			$+\infty$ ou $-\infty$

$$\begin{cases} \text{si de plus } u(x) > 0 \text{ autour de } \bullet\text{, alors } \lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty \\ \text{si de plus } u(x) < 0 \text{ autour de } \bullet\text{, alors } \lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty \end{cases}$$

Quotient de deux fonctions

si $\lim\limits_{x\to\bullet} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
si $\lim\limits_{x\to\bullet} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\bullet} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$					

Composition

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v\circ u(x) \\ & & X & \mapsto & v(X) \end{array} \qquad \text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{X\to\ell_1} v(X) = \ell_2 \end{cases}, \quad \text{alors } \lim\limits_{x\to\alpha} v\Big(u(x)\Big) = \ell_2.$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}$

III. Limites particulières

1) Taux d'accroissement

On appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On verra par la suite que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
Cela nous permet d'obtenir les limites particulières suivantes :

$$\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Exemples : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right)$

2) Croissances comparées

- **Théorème des croissances comparées.**

Pour tout $n > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

De même avec la racine carrée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$.

Et pour toute fonction polynomiale P : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) e^x = 0$.

Exemples : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1)e^x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

IV. Lever les indéterminations

Les formes indéterminéees sont : . . . .

1) Changer la forme

a. Factoriser par le terme dominant

- pour une forme de type « $\infty - \infty$ », notamment les polynômes en $\pm\infty$: factoriser par le terme « le plus puissant » (terme ***dominant***).

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + 3x^2 + 11x - 7$?

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + \ln(x) - x^2$?

- pour une forme de type « $\frac{\infty}{\infty}$ », notamment les fractions rationnelles en $\pm\infty$:
  factoriser numérateur et dénominateur par leur terme dominant
  (puis simplifier la fraction si c'est possible)

Exemples : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-4}{x^2+11x-12}$?

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln(x)}{x^2-1}$?

b. Forme conjuguée

Pour les expressions de type $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ dont la limite est indéterminée, on peut utiliser la forme conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et une identité remarquable.

Exemple : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1}$?

2) Encadrements, comparaison

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes).

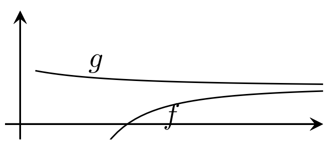
f, g et h trois fonctions définies sur un même intervalle I, avec pour tout x de I : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} f(x) = \lim_{x\to\cdot} h(x) = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} g(x) = \ell$.

Exemple : on veut déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème de comparaison.

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$:
$\star$ si $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} f(x) = +\infty$, alors
$\star$ si $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} g(x) = -\infty$, alors
$\star$ si $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to\cdot} g(x) = \ell'$, alors

Attention : dans la dernière $\star$ même si $f(x) < g(x)$, alors $\ell \leqslant \ell'$.
sur le dessin ci-contre, $f(x) < g(x)$, pourtant elles ont la même limite



Exemple : $f(x) = x^2 + \cos(x)$, quelle est sa limite en $+\infty$?