Introduction et calculs sur les fonctions.
1A - Généralités, structure.

Les fonctions ont été introduites en mathématiques vers la fin du XVII$^{\text{è}}$ siècle par Leibniz, puis ont été développées entre autres par Euler, Cauchy ... La définition a évolué au fil du temps, et l'étude des fonctions forme le domaine de l'*analyse*.

Une fonction f est définie par la donnée de deux éléments :
⋆ un procédé pour déterminer une image (en général un calcul à faire) ;
⋆ l'ensemble des nombres pour lesquels on peut appliquer ce procédé, c'est l'***ensemble de définition***, noté en général $\mathcal{D}_f$.

Exemple : la fonction f dont l'expression est $f(x) = \frac{2}{x-4}$ est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ car diviser deux nombres est toujours possible sauf lorsque le diviseur est nul, et ici $x-4$ s'annule lorsque $x = 4$.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque : $f(x) = \frac{2}{x-4}$ se note aussi $f : x \mapsto \frac{2}{x-4}$.
On dit ≪ f est la fonction qui à x associe $\frac{2}{x-4}$ ≫ ou ≪ par la fonction f, x a pour image $\frac{2}{x-4}$ ≫.

I. Rappels sur les intervalles

• **Un intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux valeurs.

Par exemple $x \in [-\frac{3}{7}; 7{,}4[$ signifie ......x...... :

$]-\infty; 3]$ est l'ensemble des nombres .... :

⋆ L'intervalle $[a; b]$ est dit ***fermé*** car ses ***bornes*** a et b sont comprises dans l'intervalle.
On l'appelle aussi un ***segment***. a ... $[a, b]$ se lit ≪ a appartient au segment $[a, b]$ ≫.
⋆ L'intervalle $]a; b[$ est dit ***ouvert*** car ses bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle : a......$]a; b[$, b......$]a; b[$.

Propriété de caractérisation des intervalles.

Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, alors $[a, b] \subset I$.

• **Intersection et réunion :**
Si I et J sont deux ensembles de nombres, l'***intersection*** de I et J est l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans I et dans J, on le note $I \cap J$. ≪ I inter J ≫
La ***réunion*** de I et de J, notée $I \cup J$ (≪ I union J ≫), est l'ensemble des nombres qui sont dans I, ou dans J ou dans les deux à la fois.
$I = [3; 7]$ et $J =]-2; 4[$:

• **Notation $\mathbb{R}$:** on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$.
Alors $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ peut se noter $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (≪ $\mathbb{R}$ privé de 0 ≫) ou $\mathbb{R}^*$ (≪ $\mathbb{R}$ étoile ≫).
De même, $]-\infty; -4[\cup]-4; 3[\cup]3; +\infty[$ se note $\mathbb{R}\backslash\{-4; 3\}$ et se lit ≪ ensemble des nombres réels, privé de -4 et 3 ≫.
On note également $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ ≪ ...

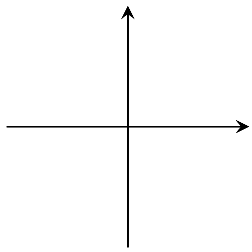
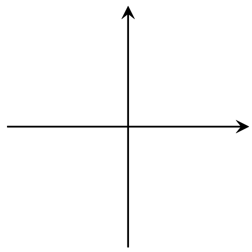
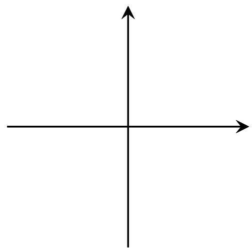
$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, ≪ .

II. Fonctions usuelles connues

fonctions de référence :

⋆ puissances :

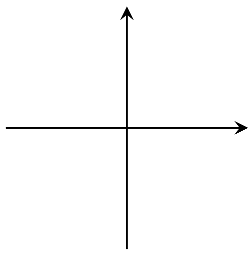
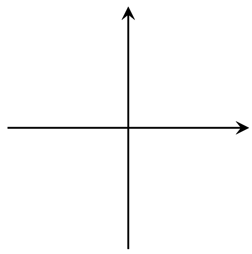
....

Rappel : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

⋆ inverses de puissances :

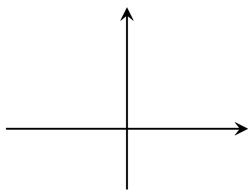
....

Rappel : $x^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}}}$

⋆ racine carrée :

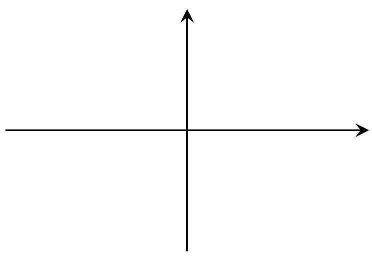
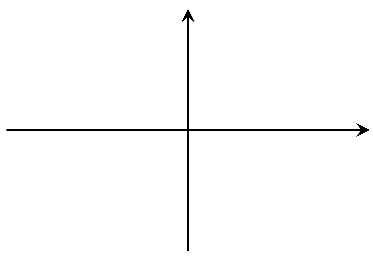
....



Rappel : si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$

⋆ cosinus et sinus :

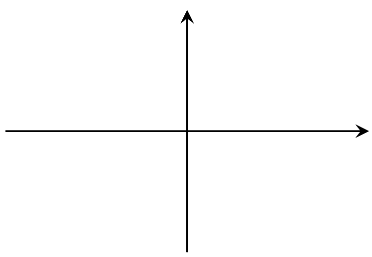
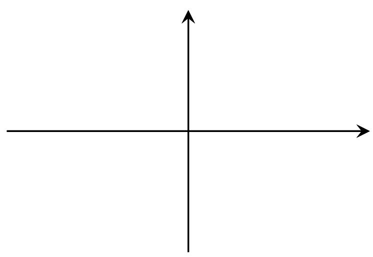
....

⋆ logarithme et exponentielle :

....

....

grandes familles de fonctions usuelles :

⋆ polynômes : ....

....

⋆ fractions rationnelles : ....

....

....

III. Structure d'une fonction

1) Addition, soustraction, produit, division de fonctions

On peut former de nouvelles fonctions en ajoutant, soustrayant ... des fonctions usuelles. Par exemple, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ est la somme de la fonction carré et de la fonction inverse.
De même, la fonction $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$ est ...

Les fonctions $u + v$, $u - v$ et $u \times v$ sont définies sur ....
autrement dit : ....
La fonction $\frac{u}{v}$ est définie sur ....
autrement dit : ....

Exemples :

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

- $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$

2) Composition de fonctions

Définition.
Soient u et v deux fonctions.
On appelle ***composée de u par v*** la fonction notée $v \circ u$ d'expression $v \circ u(x) = v(u(x))$.
Elle est définie pour tous les x de $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathcal{D}_v$: $\mathcal{D}_{v \circ u} = \{x \in \mathcal{D}_u \,|\, u(x) \in \mathcal{D}_v\}$.

Exemples :

- $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & 2x-7 & \mapsto & e^{2x-7} \\ & & X & \mapsto & e^X \end{array}$$

- $u(x) = 2x - 7$ et $w(x) = \dfrac{1}{x}$: déterminer les ensembles de définition et les expressions de $u \circ w$ et $w \circ u$.

- décomposer les fonctions suivantes en deux fonctions usuelles.

  ⋆ $f(x) = \ln(x^2+3)$

  ⋆ $g(x) = \dfrac{1}{-3x+5}$

  ⋆ $h(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 2$

Remarque importante : même si $u \circ v$ et $v \circ u$ existent toutes les deux, elles ne sont pas égales.

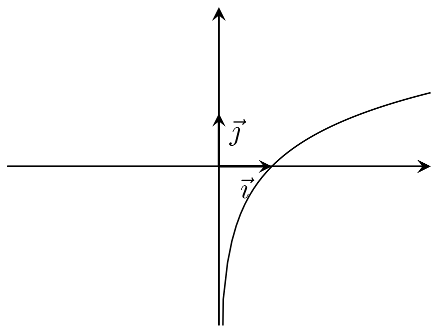
3) Cas particuliers d'opérations et compositions

Propriété.

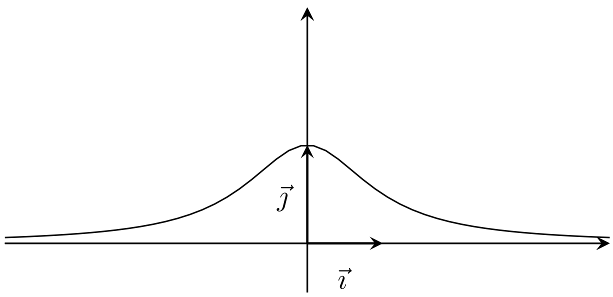
Soit a un nombre non nul.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto af(x)$, il faut multiplier les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par a.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(ax)$, il faut diviser les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ par a.

Exemples :

1. Voilà ci-contre le graphique de la fonction ln.
Tracer dans le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \ln(x+3)$ (en vert) et $x \mapsto \ln(x)+2$ (en rouge).



2.



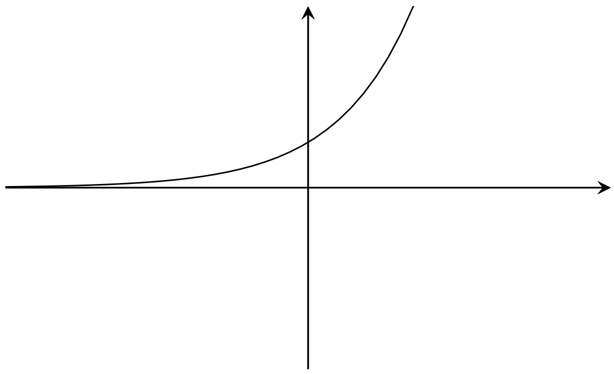
Ci-contre est représentée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
Tracer sur le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(3x)^2+1}$ (en vert) et $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ (en rouge).

3. La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est ....

....

La courbe de $x \mapsto -e^{x}$ est ....

....



4) Méthode pour déterminer les ensembles de définition

1. Identifier la structure (opération, composition ...) de la fonction, et les fonctions de référence qui interviennent (notées ici u et v).

2. ➤ $u+v$ ou $u-v$ ou $u \times v$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et prendre l'intersection.

➤ $\dfrac{u}{v}$: déterminer $\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_v$ et résoudre $v(x)=0$

puis prendre l'intersection des trois ensembles obtenus.

➤ $v \circ u$: déterminer $\mathcal{D}_u$ et résoudre $u(x) \in \mathcal{D}_v$

prendre l'intersection des deux ensembles obtenus.

$\mathcal{D}_{v\circ u}$ peut sembler n'avoir aucun rapport avec $\mathcal{D}_u$ ni $\mathcal{D}_v$.

Règles de calcul : puissances et racine carrée.

....	2^{-n-1}	2^{-n}	2^{-n+1}	...	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	...	2^{n-1}	2^n	2^{n+1}	....
....	$\frac{1}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...				....

$$\boxed{2^n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ facteurs}}} \qquad \boxed{2^{-n} = \frac{1}{\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ facteurs}}}}$$

$$x^0 = 1 \quad x^1 = x \quad 1^n = 1 \quad 0^n = 0$$

$$\boxed{x^n \times x^p = x^{n+p}}$$

$$x^5 \times x^3 = \underbrace{\underbrace{x \times x \times x \times x \times x}_{5 \text{ facteurs}} \times \underbrace{x \times x \times x}_{3 \text{ facteurs}}}_{8 \text{ facteurs}} = x^8$$

$$\boxed{x \times x^n = x^{n+1}} \text{ et } \boxed{x \times x^{n-1} = x^n}$$

$$x^n \times y^n = (x \times y)^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\boxed{\frac{1}{5^n} \times 5 = \frac{1}{5^{n-1}}} \qquad \boxed{\frac{1}{5^{n+1}} \times 5 = \frac{1}{5^n}} \qquad \boxed{\frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^n}} \qquad \boxed{5^{n+1} \times \frac{1}{5} = 5^n}$$

$$\sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{1} = 1$$

Si x et y sont positifs : $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ et $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.