

NOMBRES COMPLEXES

A - Généralités

Exercice 1.

Calculer i^9 , puis i^{31} , puis $(3i)^6$ et enfin $(-5i)^9$.

Exercice 2.

Soit $z = a + ib$, on suppose $z \neq 0$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

Exercice 3.

Mettre sous forme algébrique :

$$(a) \quad z = i^3(3i - 2)$$

$$(b) \quad z = \frac{i + 5}{(3 + 2i)^2}$$

$$(c) \quad z = \frac{1 - 3i}{1 + 3i}$$

$$(d) \quad z = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^2}$$

$$(e) \quad z = \frac{1 - i}{i}$$

$$(f) \quad z = \frac{1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$(g) \quad z = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$$

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (mettre le résultat sous forme algébrique) :
 $2z + 2i = iz$; $3z + 7 = 5\bar{z} - 2i$; $(3 + 2i)z - 5i = -iz - 2 + 5i$

Exercice 5.

Soient les points $A(1 + 2i)$, $B(4 + i)$ et $C(5 + 3i)$.

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 6. Identité du parallélogramme.

Démontrer que pour tous z et z' de \mathbb{C} , $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Quel est le rapport avec un parallélogramme ?

Exercice 7.

Mettre sous forme trigonométrique :

$$(a) \quad z = -11$$

$$(b) \quad z = 2i$$

$$(c) \quad z = 1 + i$$

$$(d) \quad z = (1 + i)^{2020}$$

$$(e) \quad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i}$$

$$(f) \quad z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(g) \quad z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$$

$$(h) \quad z = -10e^{i\pi} \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^6$$

Exercice 8.

Soit z le nombre complexe $z = (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2 .

2. Déterminer le module et un argument de z^2 et en déduire ceux de z .

Exercice 9.

Donner la forme trigonométrique de $z_1 = 2(\cos(\theta) - i \sin(\theta))$ et $z_2 = i(\cos(-\theta) + i \sin(\theta))$.

Exercice 10.

Soient A , B et C des points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2 - i$, $z_B = 1$ et $z_C = 4 - 3i$.
 A , B et C sont-ils alignés ?

Exercice 11.

Résoudre $|z - 1| = |z - i|$ et interpréter géométriquement.

Exercice 12.

Soient A , B et C les points d'affixes $z_A = -1 - 3i$; $z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. On note D le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.
Déterminer la nature des triangles BCD et ACD .

*** Exercice 13.**

On note A le point d'affixe 1 et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on considère M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' défini par $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1. À quelle condition sur M a-t-on $A = M'$?
2. (a) Démontrer que $z' \in \mathbb{U}$ et interpréter graphiquement cette propriété.
(b) Démontrer que $\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ et interpréter graphiquement cette propriété.
3. Donner une construction géométrique de M' connaissant M .