Développements limités.

☞ **Exercice basique à savoir refaire**
★ **Exercice un peu plus difficile, non indispensable**

Exercice 1.

Rappeler la dérivée de $\arctan(x)$.
En déduire le développement limité à l'ordre 6 de $\arctan(x)$ en 0.

☞ Exercice 2.

Déterminer le DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$ en $\frac{\pi}{4}$...

1. ... à l'aide de la formule de Taylor-Young ;

2. ... à l'aide du changement de variable $h = x - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3.

Déterminer les DL suivants :

☞ **1.** DL_3 de $(\sqrt{1+x} - x)\cos(2x)$ en 0 ;

☞ **2.** DL_3 de $\sin(e^x)$ en 0 ;

☞ **3.** DL_3 en 1 de $\ln(x)$;

4. DL_3 en 0 de $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$;

5. DL_3 en 0 de $\frac{e^{4x}-1}{x}$;

6. DL_{10} en 0 de $\ln(1-x^5)$.

7. DL_3 en 1 de $\frac{e^x}{x^2}$;

8. DL_5 de $\sin^2(x)\ln(1+x^2)$ en 0 ;

9. DL_3 en 5 de $\ln(x)$;

10. DL_4 en 0 de $\ln(1+\cos(x))$;

11. DL_3 en 3 de $\sqrt{x}$;

12. DL_3 en 0 de $\sqrt[3]{1+\ln(1+x)}$;

13. DL_7 en 0 de e^{x^3} ;

☞ **14.** DL_2 en 0 de $\frac{\sin(x)}{e^x-1}$;

15. DL_2 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$.

16. DL_3 en $\frac{\pi}{6}$ de $\frac{1}{\sin(x)}$;

Exercice 4.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de x^x en 1 et en déduire un équivalent de $x^x - x$ en 1.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$

Exercice 5.

En utilisant des DL, déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

☞ $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$ $\quad g(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$ $\quad h(x) = \dfrac{e^{\sin(x)} - e^x}{x^3}$ $\quad k(x) = \dfrac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{\sin(x)}$

Exercice 6.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et déterminer la position de cette tangente par rapport à la courbe de f au voisinage de $\frac{1}{2}$.

Exercice 7.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\cos(x) - e^x}{x}$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de f en 0.

2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note $\overline{f}$ le prolongement.
Justifier que $\overline{f}$ est dérivable en 0 et déterminer la position relative entre la tangente et la courbe de f.

★ Exercice 8.

Montrer que chaque courbe des fonctions suivantes admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera une équation, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

1. $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 1}$

3. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x^2}}{1 + x + \sqrt{1+x^2}}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

★ Exercice 9.

On considère la fonction $f(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ donc on précisera une équation, et la position par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
On pourra utiliser un changement de variable $x = \frac{1}{h}$ et se ramener ainsi à un DL en 0.