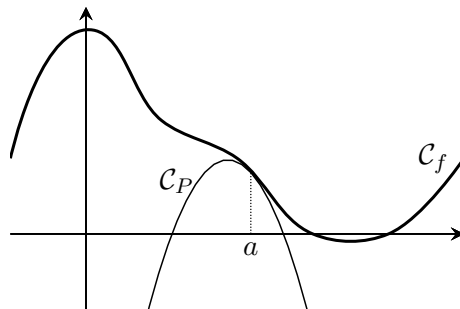


DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Rappel : $u(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(v(x))$ signifie :

L'objectif est d'approcher une fonction f par un polynôme P localement autour d'une abscisse a , et de mesurer la qualité de l'approximation.



I. Définition, existence et unicité

Définition.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** si il existe des constantes $c_0, c_1 \dots c_n$ et une fonction ε définie au voisinage de a telles que :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Ou encore $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

- Le polynôme $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité.
- Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé le **reste d'ordre n** .

Notation : on pourra noter DL pour « développement limité ».

Remarques : • la notation $o((x-a)^n)$ est justifiée car

Remarque importante : on peut ramener tout développement limité à 0 en posant $h = x - a$, alors le développement limité de f en a s'écrit : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + o(h^n)$.

1) Premiers exemples

- développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x}$ en 0 : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

En effet :

- $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ est le

En effet,

2) Forme normalisée

Dans un développement limité, si les premiers coefficients sont nuls, on peut changer la forme.
Par exemple si le développement limité de f en a est $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} c_p h^p + c_{p+1} h^{p+1} + \dots + c_m h^m + o(h^m)$,
alors on note $f(a+h) = h^p (c_p + c_{p+1} h + \dots + c_m h^{m-p} + o(h^{m-p}))$,
que l'on peut renuméroter : $f(a+h) = h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n))$: c'est la **forme normalisée** du développement limité.

3) Existence et unicité

Propriété.

Lorsque f admet un développement limité d'ordre n en a , les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont déterminés de manière unique.

Conséquence :

Si f admet un DL à l'ordre n en 0 :

★ si f est paire, alors les coefficients des puissances impaires son nuls ;

★ si f est impaire, alors les coefficients des puissances paires sont nuls.

En effet, on note $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Alors $f(-x) = \dots$

- si f est paire,
- si f est impaire,

Théorème : formule de Taylor-Young.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant a alors f admet un DL à l'ordre n en a donné par la formule :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Ou alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \dots$

Remarque : f est continue en a si et seulement si elle admet en a un DL à l'ordre 0.
 f est dérivable en a si et seulement si elle admet en a un DL à l'ordre 1.

On en déduit une première liste de DL en 0 pour les fonctions de référence :

- e^x :
- $\cos(x)$:

- $\sin(x)$:

- $(1+x)^\alpha$:

II. Opérations sur les développements limités

1) Troncature

Si $p < n$ alors en 0, « h^n tend plus vite vers 0 que h^p » : autrement dit, un DL à l'ordre p est moins précis qu'un DL à l'ordre n .

Propriété.

Si f admet en a un DL à l'ordre n , alors pour tout $p \leq n$, f admet en a un DL à l'ordre p , obtenu par **troncature**, c'est-à-dire en supprimant tous les termes dont le degré est supérieur à p .

Exemple : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + o((x-a)^3)$,

alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$.

En effet, $c_3(x-a)^3 + o((x-a)^3) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^2)$.

2) Combinaison linéaire et produit

Dans cette partie, on suppose que f et g admettent en a des DL au même ordre n , et on note P_f (respectivement P_g) la partie régulière du développement limité de f (respectivement g).

• **Somme :** $f + g$ admet un DL à l'ordre n et sa partie régulière est $P_f + P_g$.

• **Combinaison linéaire :** $f + \lambda g$ admet un DL à l'ordre n et sa partie régulière est $P_f + \lambda P_g$.

Exemple : DL à l'ordre 3 de $e^x - 2\cos(x)$ en 0 :

• **Produit :** fg admet un DL à l'ordre n et sa partie régulière est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans $P_f \times P_g$.

Exemple : DL à l'ordre 3 de $\cos(x)e^x$ en 0 :

3) Composition et quotient

- **Composition :** si f admet en 0 un DL à l'ordre n , et g admet en $f(0)$ un DL à l'ordre n , alors $g \circ f$ admet en 0 un DL à l'ordre n : sa partie régulière est constituée des termes de $P_g \circ P_f$ qui sont de degré inférieur ou égal à n .

Exemple et méthode : on cherche un DL à l'ordre 5 de $e^{\sin(x)}$ en 0 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \dots$$

avec $u = \sin(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ donc $u \rightarrow 0$:

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} \dots$$

u		$\times 1$
u^2		$\times \dots$
u^3		
u^4		
u^5		

Méthode :

- on écrit le DL_n de f , et le DL_n de g en utilisant la variable u ;
- on identifie u à la partie régulière du DL de f et on calcule successivement les puissances du DL de f en ne gardant que les termes de degré inférieur à n ;
- on remplace ces puissances dans la formule du DL de g .

- **Inverse :** si g admet en a un DL à l'ordre n avec $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ a aussi un DL à l'ordre n en a que l'on obtient en décomposant de la façon suivante : $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)} \times \frac{1}{1 - u(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ et on utilise le DL_n en 0 de $\frac{1}{1-x}$ composé avec $u(x)$.

Exemple : déterminons un DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$



- **Quotient** : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$: on combine les méthodes de l'inverse et du produit.

Exemple : déterminons un DL à l'ordre 3 en 0 de $\tan(x)$:

Remarques :

- « $x \times o(x^n) = o(x^{n+1})$ » et « $\frac{o(x^n)}{x} = o(x^{n-1})$ »
- si le premier terme du DL du dénominateur est nul, on utilise la forme normalisée :
 $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^p} \times \frac{1}{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + o(x^m)}$: pour obtenir un DL à l'ordre n à la fin, il faut travailler sur un DL à l'ordre $n + p$.

voir exemple Exercice 3. 3.

4) Intégration et dérivation terme à terme

Propriété.

On suppose que f admet un DL à l'ordre n en a , et on note F une primitive de f .

Alors F a un DL à l'ordre $n + 1$ en a .

Plus précisément : si $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$,

alors $F(x) = F(a) + c_0(x - a) + \frac{1}{2}c_1(x - a)^2 + \frac{1}{3}c_2(x - a)^3 + \dots + \frac{1}{n+1}c_n(x - a)^{n+1} + o((x - a)^{n+1})$

Exemple : on va déterminer un DL à l'ordre $n + 1$ de $\ln(1 + x)$:

$x \mapsto \ln(1 + x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Propriété.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un DL_n en a on note P_f sa partie régulière.

Et f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et admet un DL_n en a dont la partie régulière est P'_f .

III. Utilisation

1) Calculs de limites, obtention d'équivalents

Propriété.

Si f admet un DL à l'ordre n en a , alors f est équivalente au premier terme non nul de son DL :

si $f(x) = c_p(x - a)^p + c_{p+1}(x - a)^{p+1} + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} c_p(x - a)^p$.

Exemples : • déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} :$

2) Étude locale d'une courbe

Exemple : étude locale en 0 de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} :$

Propriété.

Si f n'est pas définie en a et que f admet un DL_0 en a : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} c_0 + o(1)$, alors f est prolongeable par continuité en a en posant $\bar{f}(a) = c_0$.

Si de plus, f admet un DL_1 en a : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} c_0 + c_1h + o(h)$, alors le prolongement par continuité de f est dérivable en a et $f'(a) = c_1$.

De plus, la droite d'équation $y = c_0 + c_1(x - a)$ est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Remarque : si f est définie en a et admet un DL_n en a avec $n \geq 2$: $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} c_0 + c_1h + c_nh^n + o(h^n)$, alors la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de a est déterminée à partir du signe de $c_n(x - a)^n$:

- ★ si $c_n(x - a)^n \geq 0$, la courbe est au-dessus de la tangente ;
- ★ si $c_n(x - a)^n \leq 0$, la courbe est en-dessous de la tangente.

3) Détermination d'asymptotes**Définition.**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$.

Méthode : en posant $x = \frac{1}{h}$, on ramène l'étude en $+\infty$ à une étude en 0^+ (respectivement de $-\infty$ à 0^-) et on peut alors utiliser les développements limités.

En particulier cela peut permettre de trouver une asymptote oblique (et éventuellement la limite si toutes les méthodes habituelles ont échoué !).

Exemple :

On cherche à étudier en $+\infty$, la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$.

Pour $x > 0$, on pose $x = \frac{1}{h}$.

IV. Développements limités usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

(en particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $\sqrt{1+x}$).