Programme de la semaine 13

du 6 au 10 janvier.

Calculs : *un de chaque série, au choix de l'examinateur.*

1. Calculer :
$A = (-4 + i\sqrt{5})^3 \qquad B = (-\frac{1}{3} + i\sqrt{3})^3 \qquad C = (2+3i)^3(2-3i)^3.$

2. Calculer : $D(n) = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2^n} + 2k - 3n\right) \qquad E(n) = \sum_{k=5}^{n-1} \frac{k-4}{3} \qquad F(n) = \sum_{p=5}^{n} (3^p - 12^n + 5p)$

Questions de cours : *2 au choix de l'examinateur*

Ensembles et raisonnement 4 : $\mathbb{N}$ et récurrence.

- propriété : principe de récurrence simple ;
- hérédité de la preuve par récurrence que $\forall n,\ u_n \geqslant 0$ avec (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1} \end{cases}$;
- hérédité de la preuve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 2^{n+1} - 1$ où S_n est la somme des $n+1$ premières puissances de 2 consécutives, c'est-à-dire $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$.
- propriété : principe de récurrence double.

Calculs 6 : sommes et produits.

- deux formules parmi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C = \ldots \qquad \prod_{k=0}^{n} C = \ldots \qquad \sum_{k=p}^{n} C = \ldots \qquad \prod_{k=p}^{n} C = \ldots$
  $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \ldots \qquad \sum_{k=p}^{n} k = \ldots \qquad$ avec $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = \ldots$
- simplification de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ avec les simplifications en cascade correctement justifiées ;
- factorisation de $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ et $a^4 - b^4$;
- formule du binôme de Newton (deux versions : avec Σ et sans) ;
- calcul de $(a+b)^3$, et $(x-2)^4$.

Questions d'application directe du cours :
- changement d'indice (donné) dans une somme ou un produit ;
- applications des formules de somme et du binôme de Newton ;
- récurrences simples ou doubles, mais simples ☺.

Thèmes généraux des exercices :
- sommes et produits ;
- récurrences ;
- un exercice de révision sur un thème abordé depuis le programme de colle n°8.

Barème : calculs 4 points, cours 6 points, exercices 10 points.

Bon courage, et bonnes vacances !